Luís Filipe Lopes Brálio

Licenciado em Engenharia Civil

Modelos para a quantificação da deformação em vigas de betão armado

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil – Perfil de Estruturas

Orientador: Doutor Válter José da Guia Lúcio,
Professor Associado, FCT/UNL

Júri:
Presidente: Professor Doutor Corneliu Cismasiu
Arguente: Professor Doutor Carlos Chastre
Vogal: Professor Doutor Válter Lúcio

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Janeiro 2014

À minha avó Mariana, que infelizmente não viu germinar a planta que embora não tenha sido plantada por ela, foi alimentada, regada e adubada por ela.

À Alicia e aos meus sobrinhos.

"Caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.
Al andar se hace el camino,
y al volver la vista atrás
se ve la senda que nunca
se ha de volver a pisar."

Antonio Machado (1875 – 1939)

"I shall be telling this with a sigh,
somewhere ages and ages hence:
Two roads diverged in a wood, and I...
I took the one less travelled by,
And that has made all the difference."

Robert Frost (1874 – 1963)

Agradecimentos

Gostaria em primeiro lugar agradecer o apoio de todos os meus familiares, amigos e todos aqueles que partilharam e caminharam comigo nesta etapa da minha vida, que agora finda.

Ao Professor Doutor Válter Lúcio, meu orientador, pelo apoio no desenvolvimento desta tese. Estou grato pela partilha de conhecimento assim como pela boa disposição, a qual me deu pujança e otimismo para encarar este trabalho.

Ao Professor Doutor Carlos Chastre pelo seu apoio e pelas ideias que esporadicamente partilhámos e pelo material de apoio que me facultou, que serviu para enriquecer este trabalho.

À Alicia por me ter aturado estes últimos anos e principalmente os dias anteriores à entrega da dissertação.

Aos meus pais e irmãos e em especial aos meus sobrinhos pelo apoio emocional que me deram, embora os pobres não tenham noção da ajuda que me prestaram.

Ao Hugo e à Beta o meu grande agradecimento. Encontrei em vós aquilo que busquei durante anos.

A Carmen e a Rafael pelo apoio incondicional a todos os níveis. *Muchas gracias por todo. Vosotros entrasteis y para siempre quedaréis en mi corazón.*

Ao meu sócio Edmar pelo apoio técnico, mas acima de tudo pela amizade sincera.

Ao Mário Rui e ao Gomes por toda a amizade, atenção, carinho e ensinança que me prestaram ao longo da minha infância e juventude. *Rest in peace* Mário e rápidas melhoras Gomes.

Por último mas não menos importante, à minha avó Mariana. Principal culpada pelo Homem que hoje sou.

Um obrigado para ti também que lês este agradecimento, pois de certa forma ganhaste o direito a recebê-lo.

Resumo

Na presente dissertação estudaram-se diferentes métodos de cálculo usados para a determinação da deformação (curvatura, rotação, extensão e flecha) em vigas de betão armado. Estudou-se o método de cálculo dito “exato”, método de integração numérica, e comparou-se os resultados obtidos por este método com aqueles ditos simplificados, dos quais se dá particular destaque ao método da secção determinante.

Apresenta-se também uma análise comparativa de resultados experimentais obtidos em laboratório com os resultados teóricos, obtidos pela aplicação do método de integração numérica.

Estudou-se igualmente a influência que certos parâmetros, como é o caso da fendilhação, fluência, retração e resistência à compressão do betão, têm na deformação de vigas de betão armado.

O estudo da deformação foi efetuado considerando três tipos de secção: retangular, em T e em I.

Por último o autor implementou um programa de cálculo em VBA Excel com o objetivo de quantificar os parâmetros da deformação em vigas de betão armado com secções: retangular, em T e em I, pela aplicação do método de integração numérica, de acordo com a norma EN 1992-1-1.

Palavaras chave:

Deformação, Flecha, Curvatura, Fendilhação, Fluência, Retração

Abstract

The present study is about the different calculation methods used to determine the deformation (curvature, rotation, strain and deflection) in reinforced concrete beams. The calculation method called "exact", using numerical integration, was analysed and the results obtained compared with those obtained by simplified methods. This study gives particular emphasis to the simplified method of the determinant section.

The study also presents a comparative analysis of experimental results obtained in the laboratory with the theoretical results obtained by applying the method of numerical integration.

The influence of certain parameters, such as, cracking, creep, shrinkage and the concrete compressive strength, in the deformation of reinforced concrete beams was also studied.

The study of the deformation was made considering three types of cross sections: rectangular, T and I.

Finally the author implemented a calculation program in Excel VBA in order to quantify the parameters of the deformation in reinforced concrete beams with rectangular, T and I cross sections using the numerical integration method, according to standard EN 1992-1-1.

Keywords:

Deformation, Deflection, Curvature, Cracking, Creep, Shrinkage

Índice de Matérias

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Simbologia

Letras latinas

A	área da secção transversal
a	recobrimento da armadura de compressão
A_c	área de betão
A_s	área da secção transversal da armadura de tração
A'_s	área da secção transversal da armadura de compressão
b	largura da secção transversal
b_f	largura do banzo
b_w	largura da alma
d	altura útil
E_c	módulo de elasticidade tangente do betão
$E_{c,eff}$	módulo de elasticidade efetivo da secção homogeneizada
E_{cm}	módulo de elasticidade secante do betão
E_s	módulo de elasticidade do aço
F	força
h	altura da secção transversal
h_f	altura do banzo
h_w	altura da alma
HR	humidade relativa
I	momento de inércia
inf	inferior
K	coeficiente
k	coeficiente
L	largura do vão
LN	linha neutra
M	momento fletor

M_{cr}	momento fletor de fendilhação
M_{Ed}	momento fletor de cálculo
M_{qp}	momento fletor para a combinação quase permanente de ações
N	esforço normal
p	carga distribuída
p_{cr}	carga de fendilhação
p_{Ed}	valor de cálculo da carga distribuída
p_{qp}	valor quase permanente da carga distribuída
S	momento estático
sup	superior
t	tempo
u	perímetro
V	esforço transverso
V_{Ed}	esforço transverso de cálculo da secção transversal de betão
W_c	módulo de flexão elástico do betão
$W_{I,II}$	módulo de flexão em estado I e II
x	distância
x_{LN}	distância da linha neutra à fibra mais comprimida

Letras gregas

α	parâmetro da deformação em estudo
α_e	coeficiente de homogeneização
β	relação entre a secção transversal da armadura de compressão e de tração; coeficiente que tem em conta a duração da carga ou da sua repetição
ε	extensão
ζ	coeficiente de distribuição
ρ	percentagem de armadura de tração
ρ'	percentagem de armadura de compressão
σ	tensão
σ	trabalho virtual
χ	curvatura, coeficiente de envelhecimento
ψ	coeficiente
ϕ	coeficiente de fluência
Ø	diâmetro dos varões de aço de secção circular

Capítulo 1

Introdução

1.1. Aspetos gerais

O estudo e quantificação da deformação, tem uma enorme importância no dimensionamento de estruturas em betão armado. Os engenheiros projetistas têm de ter em conta este fator aquando do dimensionamento, pois uma deformação excessiva pode causar sérios problemas na estrutura e nos elementos não estruturais. Um excesso de deformação pode não causar danos estruturais, mas pode também causar algum desconforto e sensação de insegurança por parte das pessoas. A fim de evitar tudo isto os projetistas recorrem a fórmulas de cálculo para estimar a deformação a que uma dada estrutura vai estar sujeita.

As deformações em estruturas de betão armado são causadas principalmente pela carga a que estas estão sujeitas, como é o caso do seu peso próprio assim como as diversas cargas variáveis que lhes são impostas. As causas anteriormente mencionadas podem-se considerar que são de natureza direta. Existe porém, causas de natureza indireta que também têm uma influência significativa na deformação de estruturas de betão armado, como é o caso dos efeitos diferidos do betão (fluência e retração), variações de temperatura, sismos, entre outras.

É difícil quantificar o valor exato da deformação, pois há muitos fatores que são variáveis e a própria resposta da estrutura às ações impostas é difícil de prever. Contudo existem diversos métodos de cálculo que estimam, de forma aproximada, o valor da deformação a que uma estrutura estará sujeita.

Pretende-se então com este trabalho estudar, não só, os vários métodos de cálculo da deformação em vigas de betão armado, como desenvolver um programa de cálculo baseado num destes métodos de forma a facilitar o trabalho de quem pretende obter uma estimativa da deformação a que uma estrutura em betão armado vai estar sujeita.

1.2. Objetivos

Este trabalho tem como principal objetivo a quantificação da deformação em vigas de betão armado, através do método de cálculo de integração numérica e de diversos métodos simplificados.

Pretende-se com este estudo fazer uma análise comparativa dos diferentes métodos de cálculo e elaborar recomendações para a aplicação de um método simplificado para a quantificação da deformação em vigas e em lajes de betão armado.

Outro objetivo deste trabalho é a implementação de um programa de cálculo em VBA Excel para quantificar os parâmetros da deformação (curvaturas, flecha) em vigas de betão armado de secções retangular, em T e em I, pela aplicação do método de integração numérica, de acordo com a norma EN1992-1-1.

1.3. Organização da dissertação

A presente dissertação está estruturada em seis capítulos, incluindo o presente, introdução. Segue-se uma breve descrição de cada um dos capítulos:

No **Capítulo 2** far-se-á um enquadramento geral do tema da deformação em estruturas de betão armado, onde serão abordados os motivos que levam ao estudo e consequente controlo da deformação em estruturas de betão armado. Serão apresentados neste capítulo os principais fatores que afetam a deformação, como é o caso da fendilhação, fluência e retração assim como o comportamento das estruturas quando sujeitas a esses fatores. Será igualmente mencionado de forma resumida o que alguns autores e organizações desenvolveram no estudo da deformação.

No **Capítulo 3** serão, inicialmente, descritos diversos métodos de cálculo da deformação em estruturas de betão armado. Após introduzir estes métodos será feita uma análise comparativa entre o método “exato” (método de integração numérica) e o método simplificado (método da secção determinante). Como forma de estudar a fiabilidade do método “exato” será apresentado neste capítulo um estudo comparativo entre resultados obtidos pelo método de integração numérica com os resultados experimentais obtidos em laboratório. No final do capítulo será apresentado o programa de cálculo desenvolvido pelo autor, baseado no método de integração numérica.

No **Capítulo 4** apresentam-se vários exemplos de aplicação do cálculo da flecha em estruturas de betão armado, segundo os diversos métodos de cálculo expostos no capítulo 3, para diferentes condições de apoio e para diferentes tipos de secção: retangular, em T e em I. Far-se-á, no final deste capítulo, uma análise comparativa dos resultados obtidos.

No **Capítulo 5** é apresentado um estudo sobre a influência que diversos parâmetros têm sobre a deformação, em vigas de betão armado de secção retangular.

No **Capítulo 6** apresentam-se as conclusões deste estudo e ainda algumas recomendações à aplicação dos métodos simplificados no cálculo da deformação, assim como possíveis desenvolvimentos futuros no estudo da deformação

Capítulo 2

Enquadramento geral do tema

2.1. Controlo da deformação

2.1.1. Motivos

O controlo da deformação em estruturas de betão armado e pré-esforçado deve ser tido em conta no projeto de estruturas de forma a garantir um normal funcionamento da estrutura e dos elementos não estruturais que suporta, o conforto dos utentes e de forma a não prejudicar o aspeto da mesma.

A limitação da deformação é necessária, por exemplo, em casos em que o excesso de deformação possa danificar elementos não estruturais como é o caso de paredes divisórias, envidraçados, revestimentos, entre outros.

No caso específico de lajes, uma flecha excessiva pode implicar a acumulação de águas pluviais, no caso de lajes de cobertura, ou de outro tipo, não permitindo desta forma um bom escoamento das mesmas.

Excessos de deformação embora possam não resultar em danos estruturais podem causar desconforto e sensação de insegurança aos utilizadores. O controlo da deformação deve também ter em conta o aspeto da estrutura, ressaltando nestes casos motivos de ordem estética.

2.1.2. Valores Limites

No seguimento do mencionado anteriormente e de acordo com o Eurocódigo 2 [1] apresenta-se nesta secção valores limites para as flechas em edifícios, medidas em relação aos apoios, para que a funcionalidade de estruturas correntes e o conforto dos utilizadores não sejam afetados.

Considera-se que quando a flecha em vigas, lajes ou consolas, calculadas com base na combinação de ações quase-permanentes, não excede o valor vão/250, não está comprometido o normal funcionamento nem o aspeto da estrutura. Para estruturas que se prevê uma flecha superior a este valor poderá considerar-se uma contra-flecha de forma a reduzir essas deformações, sendo que essa contra-flecha não deve, igualmente, exceder o valor vão/250.

Quando existem elementos adjacentes suscetíveis a serem danificados deverá limitar-se a flecha, após a construção desses elementos, a um valor igual a vão/500, para a combinação de ações quase-permanentes.

Estes valores são indicativos, sendo que outros limites podem ser considerados dependendo da sensibilidade das peças adjacentes, limites esses que devem ser acordados entre o projetista e o fabricante.

Os valores indicados anteriormente e presentes na norma europeia EN 1992-1-1 [1], baseiam-se num estudo alemão realizado por Mayer e Rüsch [2] na década de 60, onde foram analisados vários casos onde a flecha foi causa de reclamação.

Neste estudo foram analisados 50 casos sendo que em nenhum deles a flecha era inferior a vão/300 e somente duas apresentavam uma flecha inferior a vão/250.

Os mesmos autores estudaram também casos em que na presença de paredes divisórias estas sofreram danos devido à deformação de vigas ou lajes. Apresenta-se na figura 2.1 um histograma dos valores vão/flecha, retirado de [2] que resultaram em reclamação. Repara-se que a percentagem de casos com o valor de vão/flecha superior a 350 é pequena.

Os valores apresentados na norma europeia estão em concordância com o estudo realizado por Mayer e Rüsch.

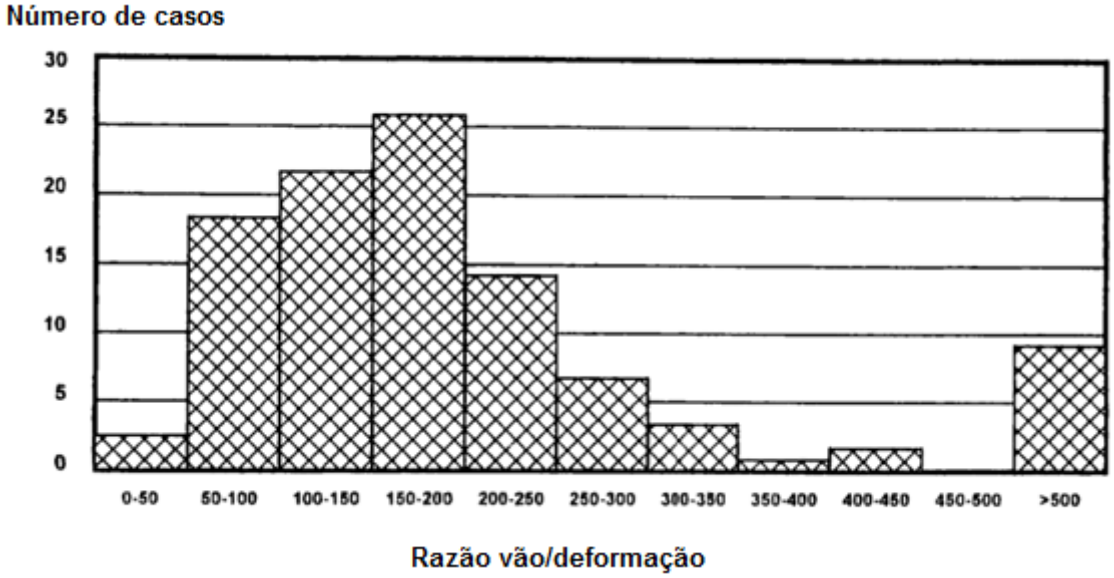


Fig. 2.1 – Dados obtidos por Mayer e Rüsch (retirado de [2])

2.1.3. Métodos de cálculo

Obter o valor real de deformações em estruturas de betão armado e pré-esforçado é difícil de obter mas existem métodos que nos dão resultados aproximados muito precisos.

Para obter o valor “real” da deformação pode-se recorrer a programas de cálculo automático de elementos finitos que se baseiam no comportamento não linear dos materiais, simulam os efeitos diferidos do betão e do aço e que têm em conta o comportamento do betão tracionado (ex: ANSYS, ADINA, ATENA, etc).

Outra forma de obter um valor, considerado “exato”, da deformação é através do método de cálculo de integração numérica, este método será desenvolvido mais à frente.

Existem no entanto diversos métodos aproximados, que se baseiam em simplificações de forma a tornar o cálculo menos moroso e menos complexo, que calculam com boa precisão os valores das deformações. Destacam-se o método bilinear, o método dos coeficientes globais, método da secção determinante e o método adotado pelo Model Code CEB-FIP 1990 [3]. Estes métodos serão estudados em pormenor nos capítulos 3 e 4.

2.2. Equações básicas para o cálculo da deformação elástica

O cálculo das deformações em estruturas de betão armado depende da capacidade de prever a resposta das secções aos esforços aplicados. O cálculo é baseado nas leis constitutivas ($\sigma - \varepsilon$), que dependem do tipo de material, e a consequente relação momento-curvatura ($M - \chi$) em cada secção. É através desta última relação que vai assentar o cálculo das flechas exposto nesta secção.

O cálculo da flecha elástica assenta sobre os pressupostos de comportamento elástico dos materiais e admite-se a hipótese de Bernoulli que assume que as secções planas continuam planas e perpendiculares ao eixo da peça após a deformação. Não se terá em conta, nesta secção, o efeito da fendilhação do betão, os efeitos diferidos no comportamento dos materiais nem o efeito do esforços de corte.

Começa-se por definir o termo "curvatura", χ, de uma secção, que corresponde à mudança de ângulo, em radianos, entre dois pontos do elemento por unidade de comprimento. Define-se raio de curvatura, *r*, como a distância entre o centro de curvatura e a linha neutra (Fig. 2.2), sendo a curvatura igual ao inverso do raio de curvatura.

$$\chi = {}^{1}/_{r} \tag{2.1}$$

A curvatura pode ser expressa em função do campo de extensões da secção (Fig. 2.3), da seguinte forma:

$$\chi = {}^{1}/_{r} = \frac{\varepsilon_s}{-y_s} = \frac{\varepsilon_i}{y_i} \Rightarrow \boldsymbol{\chi} = \frac{(\boldsymbol{\varepsilon_i} - \boldsymbol{\varepsilon_s})}{\boldsymbol{h}} \tag{2.2}$$

Onde:

- ε_s – extensão na fibra superior;
- ε_i – extensão na fibra inferior;
- y_s – distância da fibra superior à linha neutra;
- y_i – distância da fibra inferior à linha neutra;
- h – altura da secção;

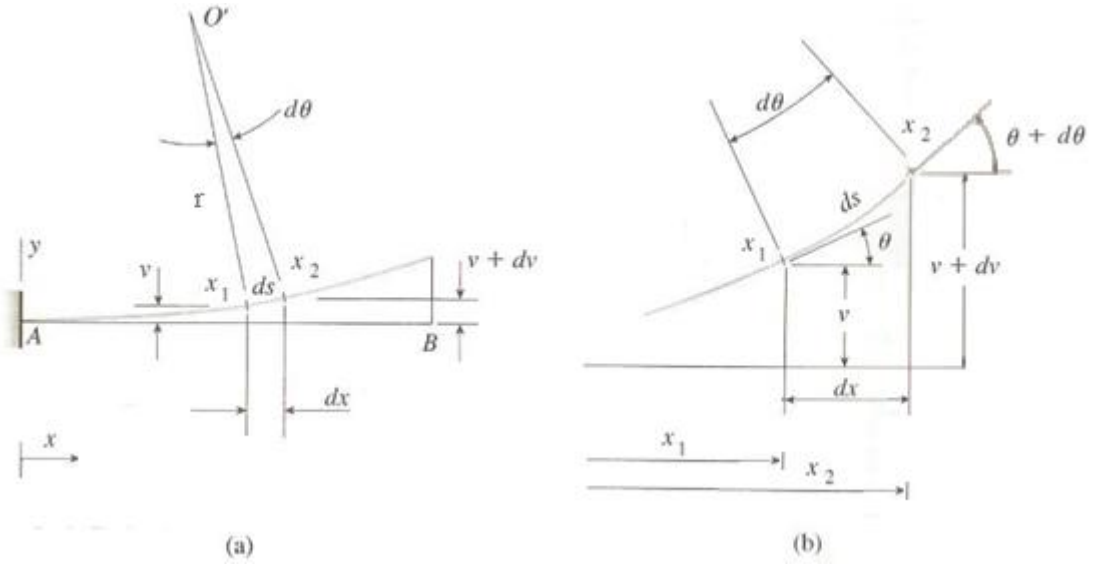


Fig. 2.2 – Curva do eixo deformado de uma viga [4]

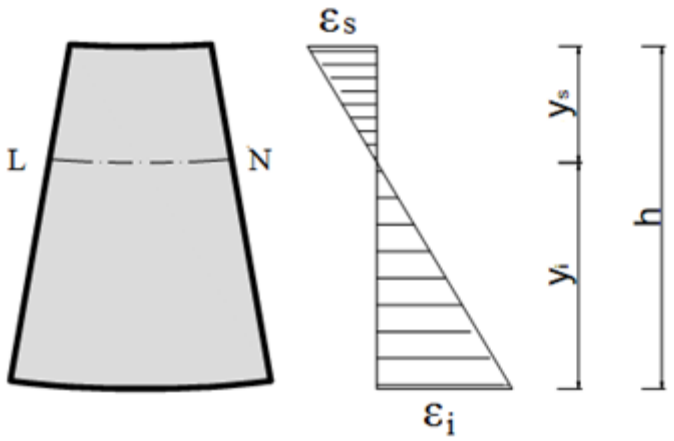


Fig. 2.3 – Campo de extensões numa secção

Uma vez que se está a admitir uma análise elástica então está-se em condições de aplicar a lei de Hooke, a qual relaciona as tensões com as extensões, através da seguinte expressão:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{2.3}$$

onde:

σ – tensão;

ε – extensão;

E – módulo de elasticidade do material;

Em flexão simples, aplicando a lei de Hooke [5], vem:

$$\begin{cases} \sigma_i = M \cdot \frac{y_i}{I} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_i = \frac{M}{EI_c} \cdot y_i \\ \sigma_s = M \cdot \frac{(-y_s)}{I} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_s = \frac{M}{EI_c} \cdot (-y_s) \end{cases} \tag{2.4}$$

Donde resulta:

$$\chi = \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_s)}{h} = \frac{M}{EI_c} \cdot \frac{y_i + y_s}{h} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\chi = \frac{M}{EI_c}} \tag{2.5}$$

onde:

M – Momento atuante na secção;

E – Módulo de elasticidade do material;

I – Momento de Inércia da secção;

EI_c – Rigidez de flexão elástica;

Fazendo agora uma análise geométrica obter-se-á uma expressão para o cálculo da flecha, a, em função da curvatura, χ.

Primeiro define-se o termo ângulo de rotação, θ, de uma dada secção, como sendo o ângulo entre o eixo x, da peça, e a tangente à curva da deformada.

Da figura 2.2 repara-se que a rotação da secção i, θ_i é dada por:

$$\theta_i = \theta_{i-1} + d\theta \tag{2.6}$$

Admitindo a hipótese dos pequenos deslocamentos, vem que:

$$ds \cong dx \quad ; \quad sen(d\theta) \cong d\theta \tag{2.7}$$

resulta que:

$$d\theta = \frac{dx}{r} = \chi \, dx \tag{2.8}$$

integrando vem:

$$\int d\theta = \int \chi \ dx \Leftrightarrow \boldsymbol{\theta} = \int \boldsymbol{\chi} \ \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{\theta_0} \tag{2.9}$$

onde θ_0 é uma constante de integração que depende das condições de fronteira.

Se um elemento for dividido em vários segmentos, de igual largura, Δx, constata-se que a flecha, a_i, medida entre o início e o fim de cada elemento é dada pela expressão:

$$a_i = \theta_i \cdot \Delta x \tag{2.10}$$

Logo a flecha total, a, será:

$$a = \sum a_i = \sum \theta_i \cdot \Delta x \tag{2.11}$$

quando Δx se aproxima de zero, a expressão anterior transforma-se, em:

$$a = \int \theta \ \ dx + \theta_0 \cdot x + a_0 \tag{2.12}$$

onde a_0 é uma constante de integração que depende das condições de fronteira.

Substituindo a equação (2.9) na expressão anterior e admitindo valores nulos para θ_0 e a_0, resulta:

$$a = \iint \chi \ dx \tag{2.13}$$

com base na equação (2.5), vem que:

$$a_c = \iint \frac{M}{EI_c} \ dx \tag{2.14}$$

Esta é a expressão geral para o cálculo da flecha elástica, a_c, obtida com base em relações geométricas, admitindo a hipótese de Bernoulli. No anexo A1 apresentam-se os valores tabelados da flecha elástica para diferentes condições de apoio e carregamento.

2.2.1. Exemplo de aplicação utilizando o princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

Nesta secção apresenta-se um exemplo de cálculo da flecha elástica com base no princípio dos trabalhos virtuais (PTV) [5], o qual se pode exprimir na seguinte forma:

$$\tau^e + \tau^i = 0 \tag{2.15}$$

onde τ^e representa o trabalho realizado pelas forças exteriores de um sistema virtual, estaticamente admissível, nos deslocamentos do sistemas real, e o termo τ^i representa o trabalho realizado pelos esforços do sistema virtual, estaticamente admissível, nas deformações do sistema real.

Da equação (2.15) resulta, que para uma dada secção do elemento em estudo, a flecha elástica, a_c é calculada através da seguinte expressão:

$$\bar{1} \cdot a_c = \int \frac{M}{EI_c} \cdot \bar{M} \ dx \Longrightarrow \boldsymbol{a_c} = \int \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\bar{M}} \ \boldsymbol{dx} \tag{2.16}$$

onde:

- a_c - flecha elástica;
- M - momento elástico atuante;
- EI_c – rigidez de flexão elástica;
- $\bar{1}$ – força virtual unitária aplicada na secção onde se quer calcular a flecha e com a direção desta;
- $\bar{M}$ - momento do sistema virtual devido à força unitária $\bar{1}$;

Considera-se como exemplo o caso de uma viga encastrada-apoiada, com um vão L, com secção retangular ($b \times h$) homogénea e constituída por um material elástico, à qual está aplicada uma carga distribuída, q (Fig. 2.4).

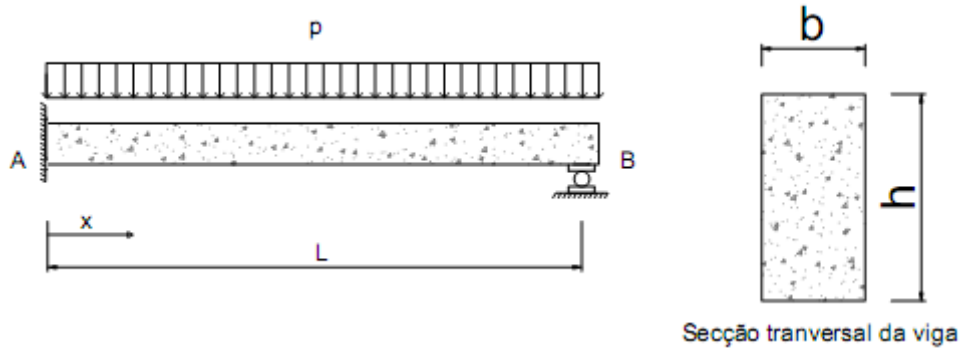


Fig. 2.4 – Viga encastrada – apoiada (exemplo 2.2.1)

Sabe-se que o esforço transverso à distancia x do apoio esquerdo, é dado por:

$$V(x) = \frac{5}{8} \cdot p \cdot L - p \cdot x$$

0nde:

$V(x)$ – esforço transverso na secção à distancia x do apoio esquerdo;

p – carregamento por unidade de comprimento da viga;

L – vão da viga;

Sabe-se que o valor do momento flector no apoio encastrado é:

$$M(x = 0) = -\frac{p \cdot L^2}{8}$$

Então o valor do momento flector a uma distância, x, do apoio obtém-se somando a este valor o valor resultante da integração do esforço transverso no domínio $[0; x]$. Vem então que o momento flector a uma distância, x, do apoio esquerdo é dado por:

$$M(x) = -\frac{p \cdot L^2}{8} + \int V(x)dx = -\frac{p \cdot L^2}{8} + \frac{5}{8} \cdot p \cdot L \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}$$

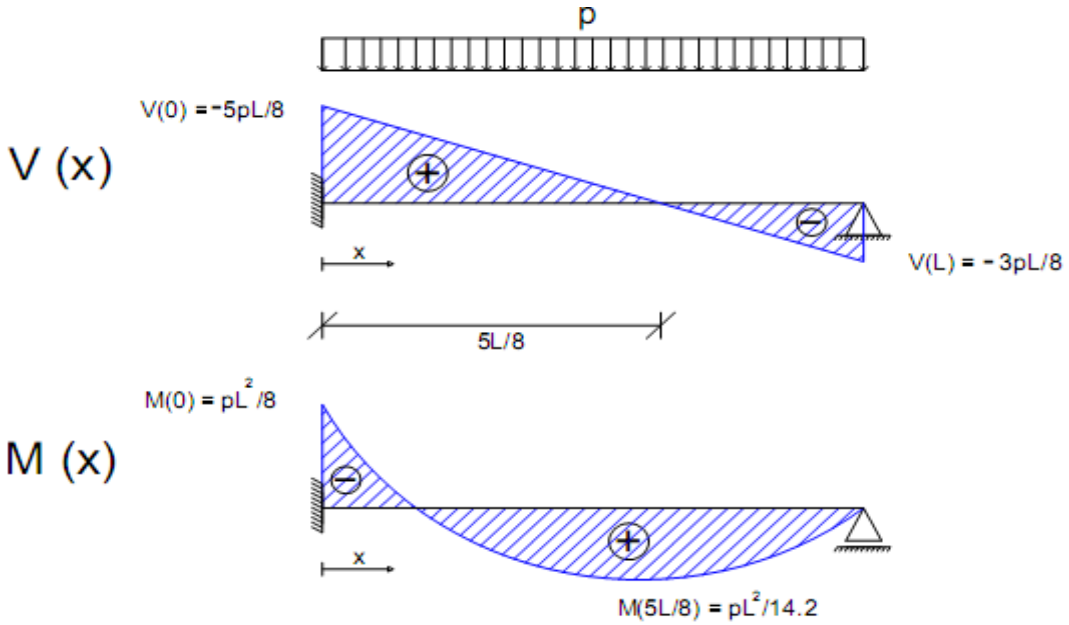


Fig. 2.5 – Diagramas de esforços devido à carga distribuída (encastrada - apoiada)

Uma vez que se trata de uma estrutura hiperestática de 1º grau e como foi dito anteriormente para a aplicação do PTV basta que o sistema virtual seja estaticamente admissível [5]. Logo o campo de esforços do sistema virtual, admitindo uma carga virtual unitária aplicada na secção de meio vão, é:

$$\begin{cases} \bar{V}(x) = \frac{1}{2}, \ \ para\ x \in \left[0; \frac{L}{2}\right[\\ \bar{V}(x) = -\frac{1}{2}, \ \ para\ x \in \left]\frac{L}{2}; L\right] \end{cases}$$

e:

$$\begin{cases} \bar{M}(x) = \frac{1}{2} \cdot x, \ \ \ para\ x \in \left[0; \frac{L}{2}\right] \\ \bar{M}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{L}{2}\right), \ \ para\ x \in \left[\frac{L}{2}; L\right] \end{cases}$$

$\bar{V}(x)$ – Esforço transverso do sistema virtual;

$\bar{M}(x)$ – momento fletor do sistema virtual;

Calculando a flecha de acordo com a equação (2.16), vem:

$$a_c = \int_0^L \frac{M \cdot \bar{M}}{EI_c}\, dx$$

$$\Rightarrow a_c = \frac{1}{EI_c} \cdot \left[\begin{array}{c} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(-\frac{p \cdot L^2}{8} + \frac{5 \cdot p \cdot L}{8} \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x\right) dx + \\ + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \left(-\frac{p \cdot L^2}{8} + \frac{5 \cdot p \cdot L}{8} \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right)\right)\, dx \end{array} \right]$$

Resolvendo a expressão anterior chega-se a um valor aproximado da flecha elástica a meio vão para uma viga encastrada-apoiada, nas condições anteriormente mencionadas:

$$a_{c,L/2} \cong \frac{p \cdot L^4}{192 \cdot EI_c}$$

De notar que o valor obtido por esta expressão não corresponde ao valor máximo da flecha na viga, nas condições do problema, mas sim ao valor da flecha a meio vão da viga. O valor máximo da flecha de uma viga encastrada-apoiada nas condições do exemplo aqui descrito está tabelado (anexo A1) e é obtido através da seguinte expressão:

$$a_{c,max} = \frac{2{,}08 \cdot p \cdot L^4}{384 \cdot EI_c}$$

O erro resultante da aproximação efectuada é de 4%.

Para se obter o valor da flecha máxima o campo de esforços virtuais teria de ser calculado com a carga virtual unitária aplicada na secção onde a flecha é máxima, que é a:

$$x_{a_{c,max}} \cong \frac{29}{50} \cdot L$$

2.3. Efeitos da fendilhação do betão

Como ponto de partida admite-se que qualquer estrutura em betão está sujeita a fendilhar. A fendilhação do betão armado é portanto um processo que não se consegue evitar mas sim controlar. Para controlar o efeito da fendilhação os projetista dimensionam as estruturas para que estas respeitem o estado limite de fendilhação, que se caracteriza por controlar a abertura de fendas a um limite aceitável que não comprometa o funcionamento, a durabilidade e o aspeto das estruturas. O cálculo da abertura de fendas sai fora do âmbito deste trabalho, mas pode ser consultado na bibliografia disponível.

As causas da fendilhação do betão podem ser divididas em dois grupos consoante a origem das ações que a provocam, sejam elas ações diretas ou indiretas. As ações diretas dizem respeito às cargas aplicadas à estrutura e provocam fendas de tração, flexão, corte, torção, entre outras. As ações indiretas dizem respeito a deformações ou acelerações impostas, provocadas, por exemplo, por variações de temperatura, retração do betão, assentamentos diferenciais ou sismos. Neste trabalho serão considerados os efeitos na deformação das fendas causadas pelas ações diretas.

2.3.1. Comportamento global de estruturas fissuradas

Até este momento admitiu-se que o comportamento do betão armado é elástico linear e foi com base nesta teoria que foram efetuados os cálculos referentes à flecha elástica. Mas o comportamento real de estruturas de betão armado afasta-se um pouco do modelo elástico linear admitido anteriormente. Isto deve-se essencialmente ao efeito da fendilhação do betão e aos efeitos diferidos, como é o caso da retração e da fluência.

À medida que a solicitação/carregamento, a que está sujeito um elemento de betão, aumenta, este passa por várias fases como ilustra a figura 2.6.

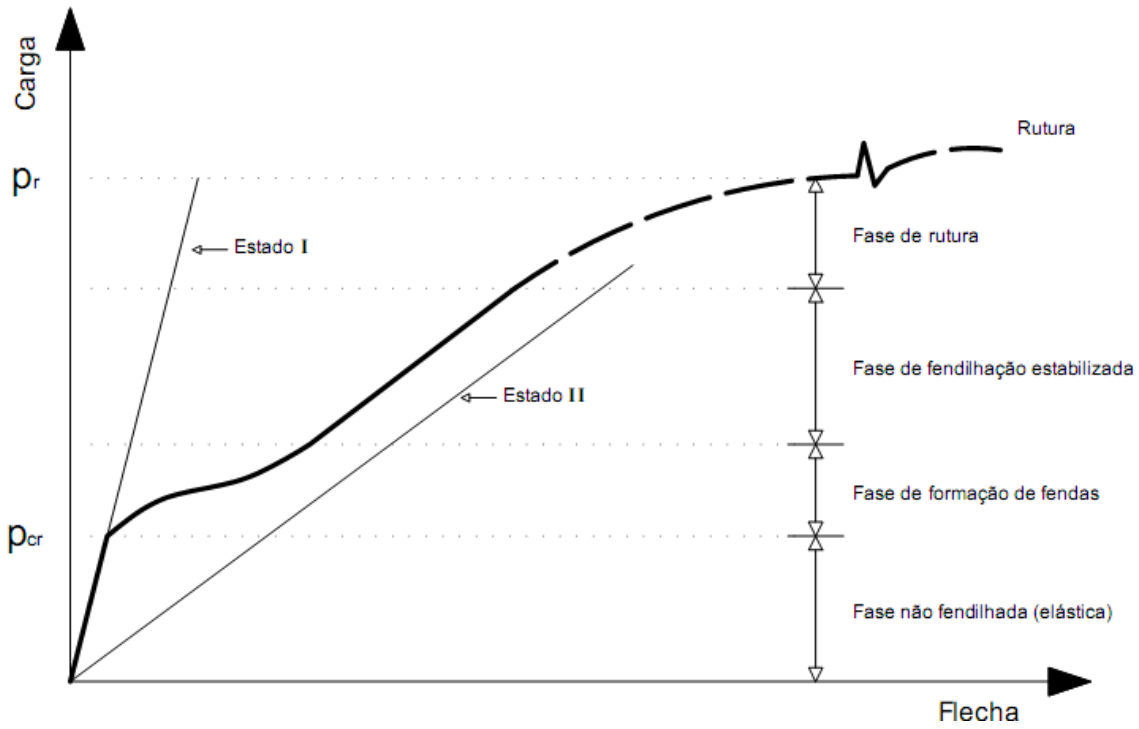


Fig. 2.6 – Curva característica carga – flecha de estruturas em betão (adaptado de [6])

Define-se estado I como sendo aquele em que a estrutura não está fendilhada, ou seja, toda a secção está a "trabalhar" qualquer que seja o estado de tensão da fibra tracionada.

Define-se estado II como sendo o estado em que a estrutura se encontra totalmente fendilhada, neste estado considera-se que a zona de betão tracionado não está a "trabalhar", ou seja, é negligenciado o contributo do betão tracionado entre fendas.

Pela análise da figura 2.10 pode-se concluir que o comportamento real de estruturas de betão armado se encontra algures entre este dois estados, e pode ser dividido em 4 fases, são elas:

Fase não fendilhada – quando a estrutura é carregada abaixo do nível de resistência à tração do betão, ou seja, quando o carregamento provoca na fibra tracionada tensões inferiores à tensão mínima de resistência à tração do betão. Nesta fase admite-se que a estrutura tem um comportamento elástico linear e pode-se dizer que a estrutura se encontra no estado I.

Fase de formação de fendas – esta fase tem início quando a estrutura é carregada a um nível tal, que provoca na fibra mais tracionada tensões iguais à tensão mínima de resistência à tração. Esta fase é caracterizada pela diminuição progressiva da rigidez à medida que novas fendas se vão formando.

Fase de fendilhação estabilizada – após a solicitação ultrapassar o valor correspondente à formação da última fenda, não se formam novas fendas, admite-se que a estrutura tem um comportamento quase linear e com uma rigidez equivalente à do estado II. Despreza-se nesta fase a influência do betão tracionado.

Fase de rutura – esta fase é caracterizada pela plastificação da armadura e consequente rutura. Quando a armadura ultrapassa o seu limite de elasticidade esta começa a plastificar até que atinge um valor limite de deformação e ocorre a rutura propriamente dita.

Como foi dito anteriormente, o comportamento real de uma estrutura de betão armado encontra-se numa fase intermédia entre o estado não fendilhado (I) e o estado fendilhado (II). Isto aplica-se no caso do cálculo da flecha, como indicado na figura 2.6, assim como no cálculo de extensões, rotações e curvaturas, como se verá adiante.

É necessário então, quando se pretende estudar a deformação de estruturas, adotar um método de cálculo de forma a representar o comportamento real das estruturas.

Apresentam-se nas secções seguintes duas abordagens para o cálculo aproximado das curvaturas, que são: o método adotado pela norma europeia (método EC2) [1] e o método adotado pelo CEB-FIP Model Code 1990 [3] (método MC90).

2.3.2. Método do EC2

O método aqui descrito é baseado no método presente no manual do CEB "*Cracking and deformation*" Bulletin d'Information Nº143 [7], datado de 1981 o qual se basea no *Model Code* à data em vigor, CEB-FIP Model Code 1978.

Para o cálculo da deformação e de forma a representar o comportamento real de estruturas de betão armado, este método define um coeficiente de distribuição, ζ, que tem em conta a contribuição do betão tracionado entre fendas. Com a introdução deste conceito, o valor aproximado do parâmetro da deformação em estudo (extensão, curvatura, rotação ou flecha) é caracterizado pela soma de duas partes. Sendo uma, aquela que se obtém considerando a estrutura em estado não fendilhado (I) e a outra considerando a estrutura em estado totalmente fendilhado (II) (Figura 2.7).

Segundo este método o valor aproximado do parâmetro em estudo é dado pela seguinte expressão:

$$\alpha = (1 - \zeta) \cdot \alpha_I + \zeta \cdot \alpha_{II} \tag{2.17}$$

onde:

α – parâmetro de deformação em estudo (extensão, curvatura, rotação ou flecha);

α_I, α_{II} – valores do parâmetro calculado, respetivamente, para os estados não fendilhado e totalmente fendilhado;

ζ – coeficiente de distribuição:

$$\zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2 \tag{2.18}$$

$\zeta = 0$ para secções não fendilhadas;

β – coeficiente que tem em conta a influência da duração da ação, ou da sua repetição, na extensão média e toma o valor:

$\beta = 1{,}0$ para um único carregamento de curta duração;

$\beta = 0{,}5$ para um carregamento de longa duração ou para carregamentos repetidos;

σ_s - tensão nas armaduras de tração, calculada para a secção fendilhada e para a combinação de ações quase-permanentes;

σ_{sr} - tensão nas armaduras de tração, calculada para a secção fendilhada e para o efeito das ações que provocam o início da fendilhação (N_{cr} no caso de tração pura ou M_{cr} no de flexão simples, onde N_{cr} é o esforço normal de fendilhação e M_{cr} é o momento de fendilhação);

Devido à linearidade entre as tensões σ_s e σ_{sr} e os esforços *N* ou *M*, no caso de tração pura e de flexão simples, respetivamente, o coeficiente de distribuição, ζ, pode ser apresentado nas seguintes formas:

no caso de tração pura:

$$\zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{N_{cr}}{N_s}\right)^2 \tag{2.19}$$

no caso de flexão simples:

$$\zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^2 \tag{2.20}$$

Note-se que nos casos em que a estrutura está solicitada abaixo do nível para o qual é excedida a resistência à tração do betão, o coeficiente ζ é nulo o que implica que a estrutura tem um comportamento de uma estrutura não fendilhada, como já havia sido mencionado.

Curvatura:

Generalizando o modelo do comportamento exposto na figura 2.3, para o caso de flexão em vigas de betão armado, vem, baseando-se na equação (2.2), que a curvatura por flexão, pode ser escrita em função das deformações no aço e no betão, como:

$$\chi = \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{d} \tag{2.21}$$

onde:

$\frac{1}{r}$ - curvatura da secção;

ε_s – extensão do aço das armaduras tracionadas;

ε_c - extensão na fibra comprimida de betão;

d – altura útil das armaduras tracionadas;

Por sua vez, admitindo um comportamento elástico linear, baseando-se na equação (2.5), vem:

$$\chi = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \tag{2.22}$$

Curvatura nos estados I e II

Com base na expressão anterior vem então que para o estado não fendilhado (I) e fendilhado (II) a curvatura pode ser calculada, respetivamente, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{r_I} = \frac{M}{E_{c,eff} \cdot I_I} \\ \frac{1}{r_{II}} = \frac{M}{E_{c,eff} \cdot I_{II}} \end{cases} \qquad (2.23 \text{ e } 2.24)$$

onde:

$\frac{1}{r_I}$ e $\frac{1}{r_{II}}$ – curvaturas no estado I e II respetivamente;

I_I e I_{II} - momentos de inércia no estado I e II, respetivamente (§ 2.3.4);

$E_{c,eff}$ – módulo de elasticidade efetivo da secção que tem em conta o efeito da fluência do betão (§ 2.3.4);

M – momento atuante na secção considerando a combinação de ações quase-permanente;

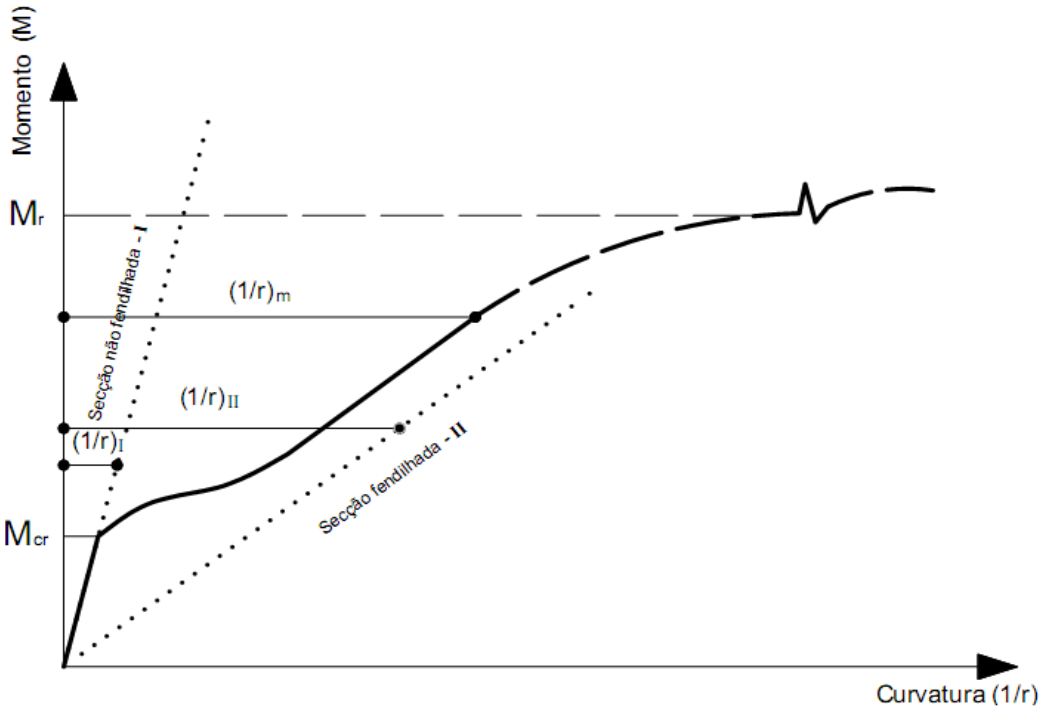


Fig. 2.7 – Relação momento – curvatura em estruturas de betão armado

No caso de deformação instantânea ($t = t_0$) não são tidos em conta os efeitos diferidos do comportamento do betão: fluência e retração.

Vem então que para $t = t_0$ o módulo de elasticidade efetivo da secção ($E_{c,eff}$) é considerado igual ao módulo de elasticidade secante do betão (E_{cm}).

$$E_{c,eff} = E_{cm} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{r_I}\right)_0 = \frac{M}{E_{cm} \cdot I_I} \\ \left(\frac{1}{r_{II}}\right)_0 = \frac{M}{E_{cm} \cdot I_{II}} \end{cases} \qquad (2.25 \text{ e } 2.26)$$

onde os momentos de inércia I_I e I_{II} são calculados de acordo com § 2.3.4.4.

No caso de deformação a longo prazo ($t = t_\infty$) terá de se ter em conta os efeitos diferidos do comportamento do betão: fluência (§ 2.3.4 e § 2.4) e retração (§ 2.5). Vem que:

$$\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)_{\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)_{\infty} + \left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)_{\mathrm{cs}} \tag{2.27}$$

onde:

$\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)_{\mathrm{T}}$ - curvatura total a longo prazo;

$\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)_{\infty}$ - curvatura a longo prazo tendo em conta a fluência:

$$\left(\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)_{\infty} = \left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)_{0} + \left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)_{\varphi}\right) \tag{2.28}$$

onde:

$\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)_{0}$ - curvatura instantânea;

$\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)_{\varphi}$ - curvatura devido à fluência;

$\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)_{\mathrm{cs}}$ - curvatura devido à retração (§ 2.5);

No cálculo da curvatura a longo prazo tendo em conta a fluência, este efeito é considerado aquando do cálculo do valor do módulo de elasticidade efetivo, E_{eff}, assim como dos momentos de inércia em secção não fendilhada (I_I) e fendilhada (I_{II}).

Vem então, com base nas equações (2.23 e 2.24), para $t = t_\infty$:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r_I}\right)_{\infty} = \frac{M}{E_{c,eff} \cdot I_I} \\ \left(\frac{1}{r_{II}}\right)_{\infty} = \frac{M}{E_{c,eff} \cdot I_{II}} \end{cases} \tag{2.29 e 2.30}$$

O módulo de elasticidade efetivo, $E_{c,eff}$, é calculado de acordo com § 2.3.5.1 e os momentos de inércia I_I e I_{II} são calculados de acordo com § 2.3.5.4.

Para obter o valor final das curvaturas a longo prazo, à expressão anterior terá de ser somado o valor da curvatura devido à retração, calculada de acordo com a § 2.5. Alguns autores negligenciam o contributo da retração para o cálculo da deformação, admitindo que a mesma tem uma influência pequena, quando comparada com a influência da fendilhação e da fluência, na deformação. Será feito um estudo mais pormenorizado acerca deste tema no subcapítulo 2.5 e aí indicadas algumas conclusões acerca da contribuição da retração na deformação a longo prazo.

Curvatura média:

Uma vez calculadas as curvaturas no estado I e II, ter-se-á que obter um valor aproximado da curvatura real, portanto tem-se a necessidade de calcular uma curvatura média, $\left(\frac{1}{r_m}\right)$, a qual é obtida com base na equação (2.17):

$$\left(\frac{1}{r_m}\right) = (1 - \zeta) \cdot \left(\frac{1}{r_I}\right) + \zeta \cdot \left(\frac{1}{r_{II}}\right) \tag{2.31}$$

No caso de <u>deformação instantânea</u> ($t = t_0$), a expressão anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{r_m}\right)_0 = (1 - \zeta) \cdot \left(\frac{1}{r_I}\right)_0 + \zeta \cdot \left(\frac{1}{r_{II}}\right)_0 \tag{2.32}$$

No caso de <u>deformação a longo prazo</u> ($t = t_\infty$), vem que:

$$\left(\frac{1}{r_m}\right)_\infty = (1 - \zeta) \cdot \left(\frac{1}{r_I}\right)_\infty + \zeta \cdot \left(\frac{1}{r_{II}}\right)_\infty \tag{2.33}$$

2.3.3. Método CEB-FIP Model Code 1990

Antes de se introduzir a abordagem de cálculo presente no MC90 [3] é de referir que existe um *Model Code* mais recente, Model Code 2010 [8], ao qual não será dado destaque neste trabalho uma vez que a abordagem seguida neste código é muito semelhante àquela seguida pela atual norma europeia EN 1992-1-1 [1].

Admitindo, no caso de flexão simples, uma relação momento-curvatura, do tipo indicado em baixo:

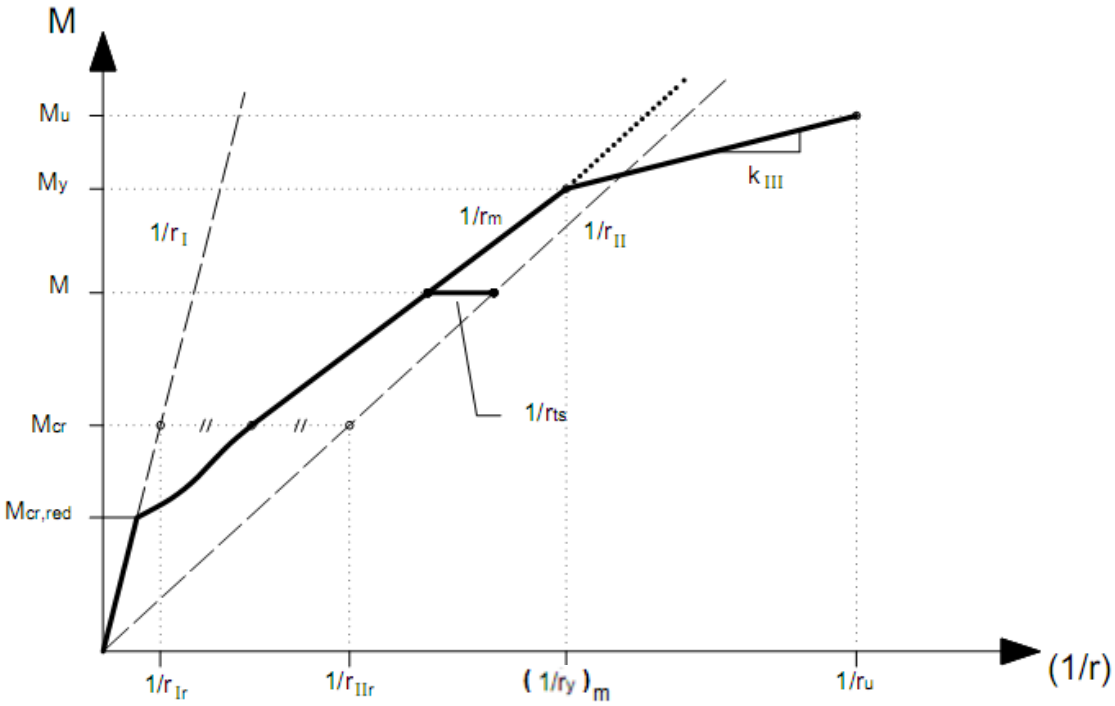


Fig. 2.8 – Relação momento – curvatura (adaptado de MC90 [3])

Para o cálculo da curvatura média $(1/r_m)$ o MC90 [3] introduz o conceito "tension stiffening", $(1/r_{ts})$, que diz respeito à contribuição do betão tracionado entre fendas. Pela análise da figura 2.8, esta contribuição diminui à medida que a solicitação aumenta.

O valor do parâmetro $(1/r_{ts})$ é calculado da seguinte forma:

$$\frac{1}{r_{ts}} = \left(\frac{1}{r_{II,cr}} - \frac{1}{r_{I,cr}}\right) \cdot \beta_b \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M}\right) \tag{2.34}$$

onde:

M – momento atuante, para a combinação de ações quase-permanete;

M_{cr} – momento de fendilhação, tendo em conta a contribuição das armaduras (§ 2.3.4);

em flexão simples:

$$M_{cr} = f_{ct} \cdot W_I \tag{2.35}$$

onde:

f_{ct} – resistência à tração do betão (admite-se igual à resistência média à tração f_{ctm});

W_I – módulo de flexão da secção homogeneizada em estado I;

$$W_I = \frac{I_I}{v_t} \tag{2.36}$$

onde:

I_I – momento de inércia em estado I;

v_t – distância da linha neutra à fibra mais tracionada

$\frac{1}{r_{I,cr}}$ – curvatura no estado I para $M = M_{cr}$;

$\frac{1}{r_{II,cr}}$ – curvatura no estado II para $M = M_{cr}$;

β_b – coeficiente que tem em conta a qualidade da aderência das armaduras assim como a influência da duração da ação ou da sua repetição;

$$\beta_b = \beta_1 \cdot \beta_2$$

onde:

β_1 - coeficiente que caracteriza a qualidade da aderência da armadura ao betão: $\beta_1 = 1{,}0$ para varões de aço nervurados e $\beta_1 = 0{,}5$ para varões lisos;

β_2 - coeficiente que tem em conta a duração da ação ou da sua repetição:

$\beta_2 = 0{,}8$ para um único carregamento de curta duração;

$\beta_2 = 0{,}5$ para cargas repetidas ou de longa duração;

Nota: Repare-se que o coeficiente β_b, presente no MC90, é equivalente ao coeficiente β, do método seguido pelo o Eurocódigo 2. A diferença, no cálculo do coeficiente, entre as duas metodologias reside em dois pontos que é pertinente discutir:

- No caso do MC90, o coeficiente tem em consideração para além da influência da duração da ação ou da sua repetição, que é comum aos dois métodos, tem também em consideração a aderência da armadura ao betão, a qual está intrinsecamente ligada ao tipo de aço utilizado, nervurado ou liso. Isto deve-se ao facto de à data da publicação do MC90 ser corrente a utilização de varões de aço lisos. Como a utilização desse tipo de varões caiu em desuso, o EC2 só tem em conta os varões de aço nervurados, logo omite o tal coeficiente que tem em conta a aderência pois para o caso de varões nervurados assume o valor unitário.
- Outro ponto onde divergem estas duas metodologias é no valor do coeficiente, tendo em conta a duração da ação ou da sua repetição. No caso de um único carregamento de curta duração o MC90 admite um valor de 0,8 para o coeficiente β_2 enquanto o EC2 assume o valor 1,0 para o coeficiente β. Isto deve-se ao facto de o MC90 considerar no cálculo do momento de fendilhação, M_{cr}, o valor do módulo de flexão em estado I (W_I) e no caso do EC2 o valor de M_{cr} é calculado para o valor do módulo de flexão elástico W_c. Isto implica que no primeiro caso o momento de fendilhação é superior ao admitido no cálculo adotado no segundo caso. Ao considerar o valor de β_2 igual a 0,8 é uma forma de "compensar" esse facto.

O método MC90 admite, no caso de elementos principalmente sujeitos à flexão, um momento de fendilhação reduzido, $M_{cr,red}$, o qual corresponde, segundo este método, ao início da fendilhação. Pela análise da figura 2.8 constata-se que a curvatura média, ($^1/_{r_m}$), deixa de estar no estado I quando o momento atuante ultrapassa o valor de $M_{cr,red}$. Este valor é um pouco inferior ao correspondente ao momento de fendilhação teórico, M_{cr}, e isto deve-se ao facto de se considerar que a estrutura está pré-fissurada, seja devido a ações térmicas, ao modo de construção ou até mesmo devido a ciclos de carga/descarga [6].

O valor do momento de fendilhação reduzido, para o caso de flexão simples, é dado pela seguinte expressão [3]:

$$M_{cr,red} = \sqrt{\beta_b} \cdot M_{cr} \tag{2.37}$$

No cálculo de M_{cr} segundo o método MC90 [3] tem-se em conta a contribuição das armaduras e o valor é obtido através da equação (2.35).

O cálculo da curvatura média pela abordagem adotada pelo CEB-FIP Model Code 1990 [3], é determinado da seguinte forma:

Para $M \leq M_{cr,red}$:

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{r_I} \tag{2.38}$$

Para $M_{cr,red} < M \leq M_y$:

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{r_{II}} - \frac{1}{r_{ts}} \tag{2.39}$$

Para $M > M_y$:

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{r_y} - \left(\frac{1}{r_{II,cr}} - \frac{1}{r_{I,cr}}\right) \cdot \beta_b \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_y}\right) + \frac{(M - M_y)}{2 \cdot K_{III}} \tag{2.40}$$

onde:

M_y – momento de cedência da secção, calculado admitindo que aço atingiu o seu limite de elasticidade;

$\frac{1}{r_y}$ - curvatura correspondente a $M = M_y$ em estado II;

com:

$$K_{III} = \frac{(M_u - M_y)}{\frac{1}{r_u} - \frac{1}{r_y}}$$

onde:

M_u – momento último/rutura;

$\frac{1}{r_u}$ – curvatura correspondente a $M = M_u$ em estado II;

2.3.4. Características da secção não fendilhada e fendilhada

2.3.4.1. Módulo de elasticidade efetivo, $E_{c,eff}$

Os valores do módulo de elasticidade efetivo aqui apresentados, são baseados nos pressupostos da secção 2.4.

<u>Deformação instantânea</u> ($t = t_0$):

$$E_{c,eff} = E_{cm} \tag{2.41}$$

onde:

$E_{c,eff}$ – módulo de elasticidade efetivo;

E_{cm} - módulo de elasticidade secante do betão;

<u>Deformação a longo prazo</u> ($t = t_\infty$):

$$E_{c,eff} = E_{cm}/(1 + \varphi) \tag{2.42}$$

onde:

φ - coeficiente de fluência;

2.3.4.2. Coeficiente de homogeneização efetivo, α_e

Deformação instantânea ($t = t_0$):

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{E_s}{E_{cm}} \tag{2.43}$$

onde:

E_s - módulo de elasticidade do aço;

Deformação a longo prazo ($t = t_\infty$):

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{E_s}{E_{cm}/(1+\varphi)} \tag{2.44}$$

2.3.4.3. Momento de fendilhação, M_{cr}

O cálculo do momento de fendilhação é efetuado admitindo a secção em estado não fendilhado (I) e a resistência mínima à tração do betão, f_{ct}.

Como forma de simplificar o cálculo do momento de fendilhação, despreza-se a contribuição das armaduras, ou seja, considera-se a secção "cheia" de betão e assume-se que a resistência à tração do betão toma o valor médio, f_{ctm} [1]. Com base nestas simplificações, vem:

$$\begin{cases} M_{cr} = \left(f_{ct} - \frac{N}{A_I}\right) \cdot W_I \cong \left(f_{ctm} - \frac{N}{A_c}\right) \cdot W_c & ; \text{ em flexão composta} \\ M_{cr} = f_{ct} \cdot W_I \cong f_{ctm} \cdot W_c & ; \text{ em flexão simples} \end{cases} \tag{2.45 e 2.46}$$

onde:

N – Esforço axial na secção;

M_{cr} – momento de fendilhação da secção;

f_{ct} – resistência à tração do betão (=f_{ctm} no cálculo de flechas);

f_{ctm} – valor médio da resistência à tração do betão;

A_I, W_I – área e módulo de flexão, respetivamente, da secção homogeneizada em estado não fendilhado tendo em conta a armadura;

A_c, W_c – área e módulo de flexão, respetivamente, da secção em estado não fendilhado desprezando a contribuição da armadura;

onde:

$$W_c = \frac{I_c}{v_t}$$

onde:

I_c – momento de inércia da secção "cheia" de betão;

v_t – distância da linha neutra à fibra mais tracionada;

Nota: A simplificação admitida para o cálculo de M_{cr}: o uso de W_c em vez de W_I e A_c em vez de A_I, tem a ver com o facto de se admitir que a resistência à tração do betão é igual à resistência média à tração do betão, $f_{ct} = f_{ctm}$. Uma vez que o valor real da resistência à tração é variável e depende do posicionamento da armadura, assim utiliza-se um valor médio da resistência, f_{ctm}. Ao fazer esta aproximação está-se a ignorar o facto de o betão já ter fendilhado antes de atingir a resistência média à tração. Então, como forma de balancear este facto admite-se um módulo de flexão igual ao módulo de flexão da secção "cheia" de betão, ignorando a presença de armadura. Assim, o valor aproximado de M_{cr} está próximo do real.

2.3.4.4. Momento de inércia em estados I e II

Nesta secção calculam-se as expressões dos momentos de inércia em estado não fendilhado (I) e fendilhado (II) para várias secções (retangular, I e T). Estudar-se-ão os casos em que o momento é positivo e negativo na secção em estudo.

Em primeiro lugar começa-se por definir o significado e as expressões de algumas características das secções que servem de base ao cálculo da posição da linha neutra e posteriormente dos momentos de inércia das várias secções.

$b, b_{f,i}, b_w$– largura da secção (os índices "f" e "w", resultam do inglês e referem-se, respetivamente, ao banzo ("*flange*") e alma ("*web*"), no caso de secções em I e T);

$h, h_{f,i}, h_w$ – altura da secção (os índices têm o mesmo significado anteriormente mencionados);

c – recobrimento das armaduras;

$\emptyset_{est}$ – diâmetro dos estribos;

$\emptyset_l$ e $\emptyset_l'$ - diâmetro da armadura longitudinal de tração e compressão, respetivamente, presentes na secção;

A_s e A_s' - área da armadura longitudinal de tração e compressão, respetivamente, presentes na secção;

d – altura útil da secção:

$$d = h - \left(c + \emptyset_{est} + \frac{\emptyset_l}{2}\right) \tag{2.47}$$

a – distância da fibra mais comprimida ao centro da armadura de compressão:

$$a = c + \emptyset_{est} + \frac{\emptyset_l'}{2} \tag{2.48}$$

ρ e ρ' - percentagem de armadura de tração e compressão, respetivamente:

$$\begin{cases} \rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \\ \rho' = \frac{A_s'}{b \cdot d} \end{cases} \tag{2.49 e 2.50}$$

β - relação entre a armadura de compressão e tração na secção:

$$\beta = \frac{A_s'}{A_s} = \frac{\rho'}{\rho} \Longrightarrow \rho' = \beta \cdot \rho \tag{2.51}$$

x – distância da fibra mais comprimida à linha neutra:

$$x = \frac{\sum(A_i \cdot d_i)}{\sum A_i} \tag{2.52}$$

onde:

A_i – área da secção homogeneizada i;

d_i – distância entre o eixo geométrico da secção homogeneizada i e a fibra mais comprimida;

Apresenta-se aqui uma introdução teórica acerca do cálculo dos momentos de inércia. Estes serão calculados com base no teorema de Steiner, que define que o valor do momento de inércia de uma dada secção em relação a um eixo com ela complanar, é igual à soma do momento de inércia da mesma área, em relação ao seu eixo central, paralelo ao primeiro, com o produto da área da secção pelo quadrado da distância entre os eixos [5]. Traduzindo numa expressão, vem:

$$I_i' = I_i + A_i \cdot {d_i}^2 \Longrightarrow I' = \sum\left(I_i + A_i \cdot {d_i}^2\right) \tag{2.53}$$

onde:

I' – momento de inércia total em relação a um dado eixo;

I_i' – momento de inércia da secção homogeneizada i em relação a um eixo de referência;

I_i – momento de inércia da secção homogeneizada i em relação ao seu eixo geométrico;

A_i – área da secção homogeneizada i;

d_i – distância entre o eixo geométrico da secção homogeneizada i e o eixo de referência;

2.3.4.4.1. Secção retangular

Estado I:

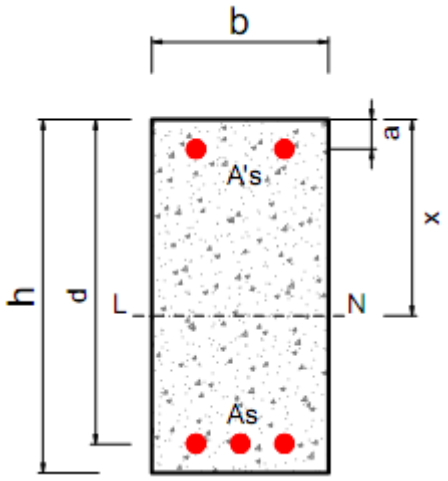


Fig. 2.9 – Secção retangular em estado I

<u>Posição da linha neutra:</u>

Através da equação (2.52), vem que:

$$x = \frac{\sum(A_i \cdot d_i)}{\sum A_i} = \frac{\left(b \cdot h \cdot \frac{h}{2}\right) + \alpha_e \cdot A_s \cdot d + \alpha_e \cdot A_s' \cdot a}{(b \cdot h) + \alpha_e \cdot (A_s + A_s')}$$

$$x = \frac{\frac{b \cdot h^2}{2} + \alpha_e \cdot \rho \cdot b \cdot d^2 + \alpha_e \cdot \rho' \cdot b \cdot d \cdot a}{b \cdot h + \alpha_e \cdot b \cdot d \cdot (\rho + \rho')}$$

$$x = \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{d}\right)^2 + \alpha_e \cdot \rho \cdot \left(1 + \beta \cdot \frac{a}{d}\right)}{\frac{h}{d} + \alpha_e \cdot \rho \cdot (1 + \beta)}\right) \cdot d \qquad (2.54)$$

<u>Cálculo do momento de inércia, I_I:</u>

Através da expressão (2.53), vem que, o momento de inércia, I_I, da secção homogeneizada em relação ao eixo da linha neutra, é dado por:

$$I_I = \left[I_c + A_c \cdot \left(x - \frac{h}{2}\right)^2\right] + [I_{As} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x)^2] + [I_{A's} + \alpha_e \cdot A_s' \cdot (x - a)^2]$$

Como o valor do momento de inércia das armaduras em relação ao seu eixo geométrico, I_{As} e $I_{A's}$, calculado de acordo com a expressão ($I = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$), é muito pequeno, admite-se que é nulo. Vem então que:

$$I_I = \left[\frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(x - \frac{h}{2}\right)^2\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x)^2] + [\alpha_e \cdot A_s' \cdot (x - a)^2]$$

$$\Rightarrow I_I = \left[\frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(x - \frac{h}{2}\right)^2\right] + \alpha_e \cdot \rho \cdot b \cdot d \cdot [(d-x)^2 + \beta \cdot (x-a)^2]$$

Colocando, $\frac{b \cdot h^3}{12} = I_c$, em evidencia vem:

$$I_I = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \left\{\left[1 + \frac{12}{h^2} \cdot \left(x - \frac{h}{2}\right)^2\right] + \frac{12}{h^3} \cdot \alpha_e \cdot \rho \cdot d \cdot [(d-x)^2 + \beta \cdot (x-a)^2]\right\}$$

$$I_I = I_c \cdot \left\{\left[1 + 3 \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{h} - 1\right)^2\right] + 12 \cdot \alpha_e \cdot \rho \cdot \left(\frac{d}{h}\right)^3 \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{d}\right)^2 + \beta \cdot \left(\frac{x}{d} - \frac{a}{d}\right)^2\right]\right\} \qquad (2.55)$$

Estado II:

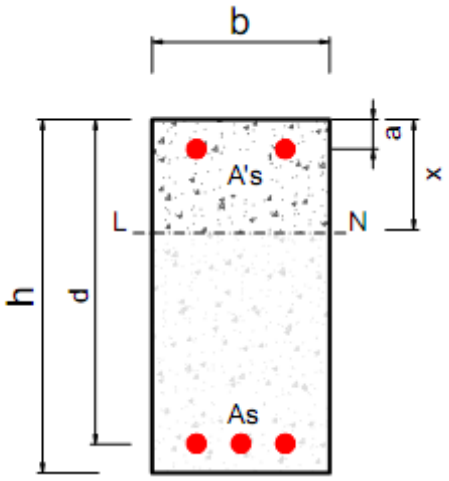


Fig. 2.10 – Secção retangular em estado II

<u>Posição da linha neutra:</u>

Neste caso (estado II) para o cálculo da posição da linha neutra não se considera a contribuição do betão tracionado.

Através da equação (2.52), vem que:

$$x = \frac{\sum(A_i \cdot d_i)}{\sum A_i} = \frac{\left(b \cdot x \cdot \frac{x}{2}\right) + \alpha_e \cdot A_s \cdot d + \alpha_e \cdot A'_s \cdot a}{(b \cdot x) + \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right) + (\alpha_e \cdot d^2 \cdot \rho) + (\alpha_e \cdot a \cdot d \cdot \beta \cdot \rho)}{x + [\alpha_e \cdot d \cdot \rho \cdot (1+\beta)]}$$

dividindo ambos o membros por d, vem:

$$\Rightarrow \frac{x}{d} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{d}\right)^2 + \alpha_e \cdot \rho \cdot \left(1 + \frac{a}{d} \cdot \beta\right)}{\frac{x}{d} + \alpha_e \cdot \rho \cdot (1+\beta)} \Rightarrow 1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{d}\right)^2 + \alpha_e \cdot \rho \cdot \left(1 + \frac{a}{d} \cdot \beta\right)}{\left(\frac{x}{d}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{\alpha_e \cdot \rho \cdot (1+\beta)}{x/d}\right]}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{d} \cdot \sqrt{\alpha_e \cdot \rho} \cdot \sqrt{(1+\beta)^2 \cdot d \cdot \alpha_e \cdot \rho + 2 \cdot (a \cdot \beta + d)} - (1+\beta) \cdot d \cdot \alpha_e \cdot \rho$$

Colocando d em evidência, vem:

$$x = d \cdot \left(\sqrt{(\alpha_e \cdot \rho)} \cdot \sqrt{(1+\beta)^2 \cdot (\alpha_e \cdot \rho) + 2 \cdot \left(\frac{a}{d} \cdot \beta + 1\right)} - (1+\beta) \cdot (\alpha_e \cdot \rho)\right)$$

colocando $(\alpha_e \cdot \rho)$ em evidência, vem:

$$x = d \cdot (\alpha_e \cdot \rho) \cdot \left[\sqrt{(1+\beta)^2 + \frac{2}{(\alpha_e \cdot \rho)} \cdot \left(\frac{a}{d} \cdot \beta + 1\right)} - (1+\beta)\right] \tag{2.56}$$

<u>Cálculo do momento de inércia, I_{II}:</u>

Através da expressão (2.53), vem que, o momento de inércia, I_{II}, da secção homogeneizada em relação ao eixo da linha neutra, é dado por:

$$I_{II} = \left[\frac{b \cdot x^3}{12} + b \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2\right] + [I_{As} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (d-x)^2] + [I_{A's} + \alpha_e \cdot A'_s \cdot (x-a)^2]$$

$$\Rightarrow I_{II} = \left[\frac{b \cdot x^3}{3}\right] + \alpha_e \cdot \rho \cdot b \cdot d \cdot [(d-x)^2 + \beta \cdot (x-a)^2]$$

$$\Rightarrow I_{II} = \left[\frac{b \cdot x^3}{3}\right] + \alpha_e \cdot \rho \cdot b \cdot d^3 \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{d}\right)^2 + \beta \cdot \left(\frac{x}{d} - \frac{a}{d}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow I_{II} = \left[\frac{b \cdot x^3}{3}\right] + \alpha_e \cdot \rho \cdot b \cdot d^3 \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{d}\right)^2 + \beta \cdot \left(\frac{x}{d} - \frac{a}{d}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow I_{II} = \left[\frac{b \cdot x^3}{3} \cdot \frac{h^3}{4} \cdot \frac{4}{h^3}\right] + \alpha_e \cdot \rho \cdot b \cdot d^3 \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{d}\right)^2 + \beta \cdot \left(\frac{x}{d} - \frac{a}{d}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow I_{II} = \left[\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot 4 \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^3\right] + \alpha_e \cdot \rho \cdot b \cdot d^3 \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{d}\right)^2 + \beta \cdot \left(\frac{x}{d} - \frac{a}{d}\right)^2\right]$$

Colocando, $\frac{b \cdot h^3}{12} = I_c$, em evidência vem:

$$I_{II} = I_c \cdot \left\{\left[4 \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^3\right] + 12 \cdot \alpha_e \cdot \rho \cdot \left(\frac{d}{h}\right)^3 \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{d}\right)^2 + \beta \cdot \left(\frac{x}{d} - \frac{a}{d}\right)^2\right]\right\} \tag{2.57}$$

2.3.4.4.2. Secção em I

Estado I:

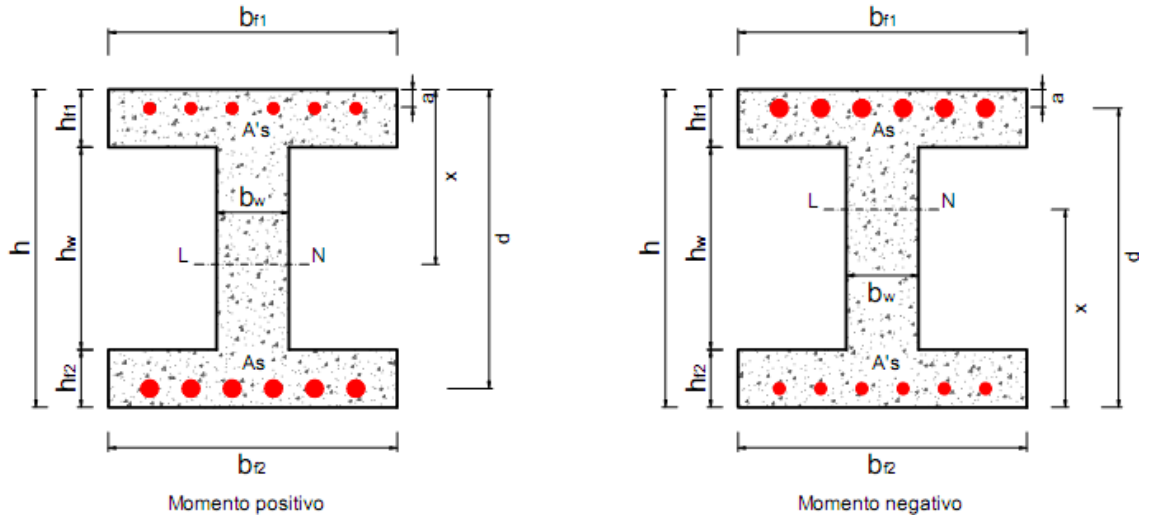


Fig. 2.11 – Secção em I no estado I para momento positivo e negativo

Posição da linha neutra:

- Momento atuante positivo:

Através da equação (2.52), vem que:

$$x = \frac{\sum(A_i \cdot d_i)}{\sum A_i}$$

$$x = \frac{\left[b_{f1} \cdot h_{f1} \frac{h_{f1}}{2}\right] + \left[b_w \cdot h_w \cdot \left(h_{f1} + \frac{h_w}{2}\right)\right] + \left[b_{f2} \cdot h_{f2} \cdot \left(h_{f1} + h_w + \frac{h_{f2}}{2}\right)\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot d] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot a]}{(b_{f1} \cdot h_{f1}) + (b_w \cdot h_w) + (b_{f2} \cdot h_{f2}) + \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)} \quad (2.58)$$

- Momento atuante negativo:

De forma análoga ao caso do momento atuante positivo, vem que:

$$x = \frac{\left[b_{f2} \cdot h_{f2} \frac{h_{f2}}{2}\right] + \left[b_w \cdot h_w \cdot \left(h_{f2} + \frac{h_w}{2}\right)\right] + \left[b_{f1} \cdot h_{f1} \cdot \left(h_{f2} + h_w + \frac{h_{f1}}{2}\right)\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot d] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot a]}{(b_{f2} \cdot h_{f2}) + (b_w \cdot h_w) + (b_{f1} \cdot h_{f1}) + \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)} \quad (2.59)$$

Cálculo do momento de inércia, I_I:

- Momento atuante positivo:

Através da expressão (2.53), vem que, o momento de inércia, I_I da secção homogeneizada em relação ao eixo da linha neutra, é dado por:

$$I_I = \left\{ \begin{array}{c} \left[\left(\frac{b_{f1} \cdot h_{f1}{}^3}{12}\right) + (b_{f1} \cdot h_{f1}) \cdot \left(x - \frac{h_{f1}}{2}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{b_w \cdot h_w{}^3}{12}\right) + (b_w \cdot h_w) \cdot \left(h_{f1} + \frac{h_w}{2} - x\right)^2\right] + \\ + \left[\left(\frac{b_{f2} \cdot h_{f2}{}^3}{12}\right) + (b_{f2} \cdot h_{f2}) \cdot \left(h_{f1} + h_w + \frac{h_{f2}}{2} - x\right)^2\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x)^2] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot (x - a)^2] \end{array} \right\} \quad (2.60)$$

- Momento atuante negativo:

De forma análoga ao caso do momento atuante positivo, vem que:

$$I_I = \left\{ \begin{array}{c} \left[\left(\frac{b_{f2} \cdot h_{f2}{}^3}{12}\right) + (b_{f2} \cdot h_{f2}) \cdot \left(x - \frac{h_{f2}}{2}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{b_w \cdot h_w{}^3}{12}\right) + (b_w \cdot h_w) \cdot \left(h_{f2} + \frac{h_w}{2} - x\right)^2\right] + \\ + \left[\left(\frac{b_{f1} \cdot h_{f1}{}^3}{12}\right) + (b_{f1} \cdot h_{f1}) \cdot \left(h_{f2} + h_w + \frac{h_{f1}}{2} - x\right)^2\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x)^2] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot (x - a)^2] \end{array} \right\} \quad (2.61)$$

Estado II:

No caso de secções em I, aquando do cálculo dos momento de inércia no estado fendilhado (II), ter-se-á de fazer duas metodologias de cálculo consoante a posição da linha neutra esteja no banzo ou na alma da secção em estudo.

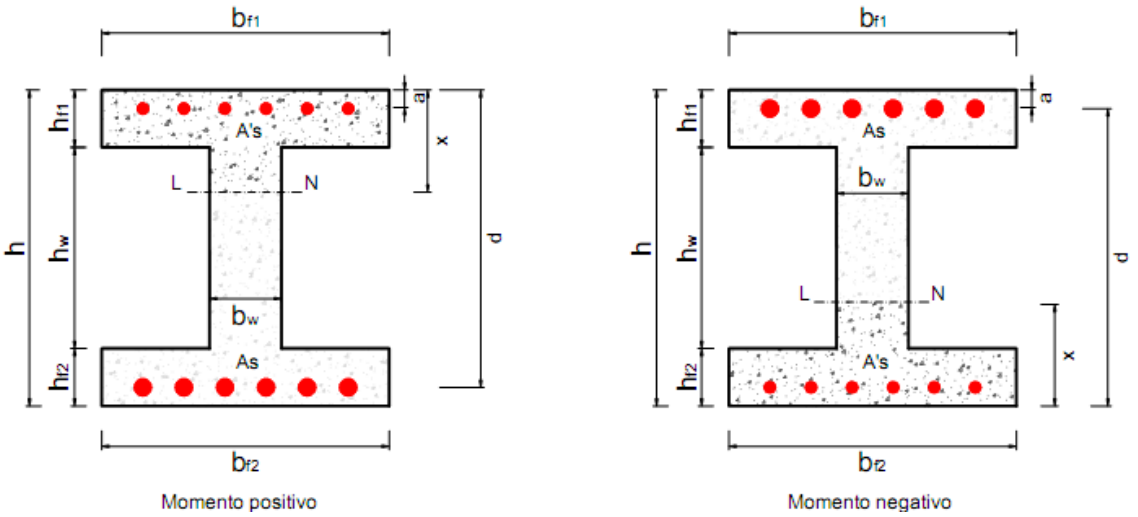


Fig. 2.12 – Secção em I no estado II para momento positivo e negativo

<u>Posição da linha neutra:</u>

No cálculo da posição da linha neutra, em estado II não se considera a contribuição do betão tracionado.

- Momento atuante positivo:

Admitindo LN no banzo superior:

Através da equação (2.52), vem que:

$$x = \frac{\sum(A_i \cdot d_i)}{\sum A_i} = \frac{\left[b_{f1} \cdot x \cdot \frac{x}{2}\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot d] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot a]}{(b_{f1} \cdot x) + \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)}$$

$$x = \frac{\sqrt{\alpha_e} \cdot \sqrt{\alpha_e \cdot {A_s}^2 + 2 \cdot (\alpha_e \cdot A'_s + b_{f1} \cdot d) \cdot A_s + (2 \cdot a \cdot b_{f1} + \alpha_e \cdot A'_s) \cdot A'_s} - \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)}{b_{f1}} \qquad (2.62)$$

Se: $x > h_{f1}$, então a linha neutra encontra-se na alma e terá de se calcular um novo valor de x admitindo neste caso que a linha neutra se encontra na alma. Vem:

LN na alma:

Através da equação (2.52), vem que:

$$x = \frac{\sum(A_i \cdot d_i)}{\sum A_i} = \frac{\left[b_{f1} \cdot h_{f1} \cdot \frac{h_{f1}}{2}\right] + \left[b_w \cdot (x - h_{f1}) \cdot \frac{(h_{f1} + x)}{2}\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot d] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot a]}{(b_{f1} \cdot h_{f1}) + [b_w \cdot (x - h_{f1})] + \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)}$$

$$x = \frac{\left[\sqrt{\alpha_e{}^2.A_s{}^2+2\cdot\alpha_e\cdot A_s\cdot\left((d-h_{f1})\cdot b_w+\alpha_e\cdot A'_s+b_{f1}\cdot h_{f1}\right)+\left(2\cdot\alpha_e\cdot A'_s\cdot a-(2\cdot\alpha_e\cdot A'_s+b_{f1}\cdot h_{f1})\cdot h_{f1}\right)\cdot b_w+\left(\alpha_e\cdot A'_s+b_{f1}\cdot h_{f1}\right)^2}\right]-}{\frac{-\alpha_e\cdot A_s+b_w\cdot h_{f1}-\alpha_e\cdot A'_s-b_{f1}\cdot h_{f1}}{b_w}}$$

(2.63)

- Momento atuante negativo:

De forma análoga ao caso do momento atuante positivo, vem que:

Admitindo LN no banzo inferior:

$$x = \frac{\sqrt{\alpha_e}\cdot\sqrt{\alpha_e\cdot A_s{}^2+2\cdot(\alpha_e\cdot A'_s+b_{f2}\cdot d)\cdot A_s+(2\cdot a\cdot b_{f2}+\alpha_e\cdot A'_s)\cdot A'_s}-\alpha_e\cdot(A_s+A'_s)}{b_{f2}} \quad (2.64)$$

Se: $x > h_{f2}$ então a linha neutra encontra-se na alma e terá de se calcular um novo valor de x admitindo neste caso que a linha neutra se encontra na alma. Vem:

LN na alma:

$$x = \frac{\left[\sqrt{\alpha_e{}^2.A_s{}^2+2\cdot\alpha_e\cdot A_s\cdot\left((d-h_{f2})\cdot b_w+\alpha_e\cdot A'_s+b_{f2}\cdot h_{f2}\right)+\left(2\cdot\alpha_e\cdot A'_s\cdot a-(2\cdot\alpha_e\cdot A'_s+b_{f2}\cdot h_{f2})\cdot h_{f2}\right)\cdot b_w+\left(\alpha_e\cdot A'_s+b_{f2}\cdot h_{f2}\right)^2}\right]-}{\frac{-\alpha_e\cdot A_s+b_w\cdot h_{f2}-\alpha_e\cdot A'_s-b_{f2}\cdot h_{f2}}{b_w}}$$

(2.65)

<u>Cálculo do momento de inércia, I_{II}:</u>

- Momento atuante positivo:

LN no banzo superior:

$$I_{II} = \left(\frac{b_{f1}\cdot x^3}{3}\right) + [\alpha_e\cdot A_s\cdot(d-x)^2] + [\alpha_e\cdot A'_s\cdot(x-a)^2] \quad (2.66)$$

LN na alma:

$$I_{II} = \left\{\left[\left(\frac{b_{f1}\cdot h_{f1}{}^3}{12}\right) + \left(b_{f1}\cdot h_{f1}\right)\cdot\left(x-\frac{h_{f1}}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{b_w\cdot(x-h_{f1})^3}{3}\right] + [\alpha_e\cdot A_s\cdot(d-x)^2] + [\alpha_e\cdot A'_s\cdot(x-a)^2]\right\}$$

(2.67)

- Momento atuante negativo:

De forma análoga ao caso do momento atuante positivo, vem que:

LN no banzo inferior:

$$I_{II} = \left(\frac{b_{f2}\cdot x^3}{3}\right) + [\alpha_e\cdot A_s\cdot(d-x)^2] + [\alpha_e\cdot A'_s\cdot(x-a)^2] \quad (2.68)$$

LN na alma:

$$I_{II} = \left\{\left[\left(\frac{b_{f2}\cdot h_{f2}{}^3}{12}\right) + \left(b_{f2}\cdot h_{f2}\right)\cdot\left(x-\frac{h_{f2}}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{b_w\cdot(x-h_{f2})^3}{3}\right] + [\alpha_e\cdot A_s\cdot(d-x)^2] + [\alpha_e\cdot A'_s\cdot(x-a)^2]\right\}$$

(2.69)

2.3.4.4.3. Secção em T

Estado I:

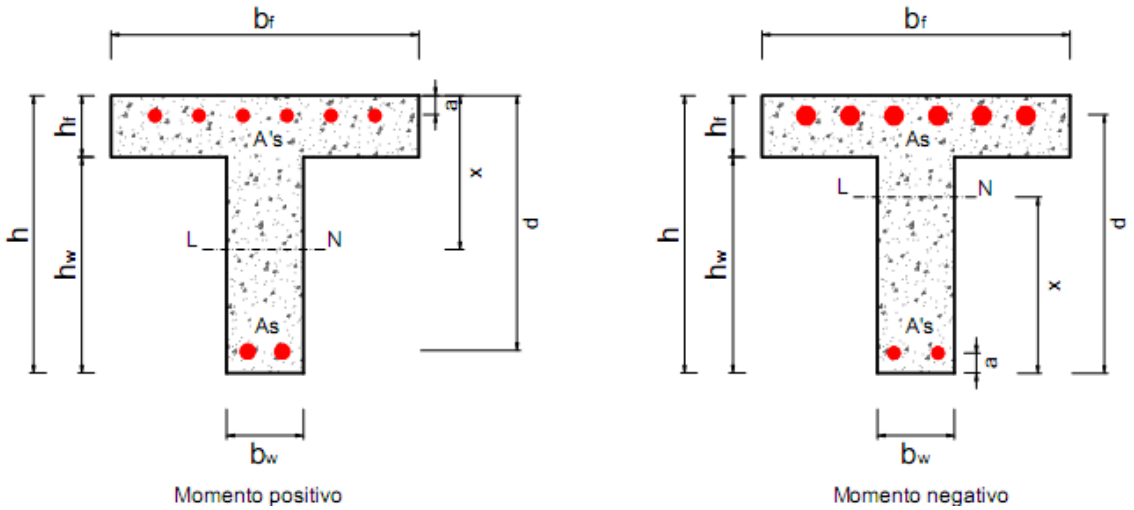


Fig. 2.13 – Secção em T no estado I para momento positivo e negativo

<u>Posição da linha neutra:</u>

- Momento atuante positivo:

Através da equação (2.52), vem que:

$$x = \frac{\sum(A_i \cdot d_i)}{\sum A_i}$$

$$x = \frac{\left[b_f \cdot h_f \cdot \frac{h_f}{2}\right] + \left[b_w \cdot h_w \cdot \left(h_f + \frac{h_w}{2}\right)\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot d] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot a]}{(b_f \cdot h_f) + (b_w \cdot h_w) + \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)} \tag{2.70}$$

- Momento atuante negativo:

De forma análoga ao caso do momento atuante positivo, vem que:

$$x = \frac{\left[b_w \cdot h_w \cdot \left(\frac{h_w}{2}\right)\right] + \left[b_f \cdot h_f \cdot \left(h_w + \frac{h_f}{2}\right)\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot d] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot a]}{(b_w \cdot h_w) + (b_f \cdot h_f) + \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)} \tag{2.71}$$

<u>Cálculo do momento de inércia, I_I:</u>

- Momento atuante positivo:

Através da expressão (2.53), vem que, o momento de inércia, I_I, da secção homogeneizada em relação ao eixo da linha neutra, é dado por:

$$I_I = \left\{ \begin{array}{c} \left[\left(\frac{b_f \cdot h_f^3}{12}\right) + (b_f \cdot h_f) \cdot \left(x - \frac{h_f}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{b_w \cdot h_w^3}{12} + (b_w \cdot h_w) \cdot \left(h_f + \frac{h_w}{2} - x\right)^2\right] + \\ +[\alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x)^2] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot (x - a)^2] \end{array} \right\} \tag{2.72}$$

- Momento atuante negativo:

De forma análoga ao caso do momento atuante positivo, vem que:

$$I_I = \left\{ \begin{array}{c} \left[\frac{b_w \cdot h_w^3}{12} + (b_w \cdot h_w) \cdot \left(x - \frac{h_w}{2}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{b_f \cdot h_f^3}{12}\right) + (b_f \cdot h_f) \cdot \left(h_w + \frac{h_f}{2} - x\right)^2\right] + \\ +[\alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x)^2] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot (x - a)^2] \end{array} \right\} \tag{2.73}$$

Estado II:

O cálculo do momento de inércia, I_{II}, de secções em T é feito de forma análoga ao cálculo do momento de inércia, I_{II}, de secções em I.

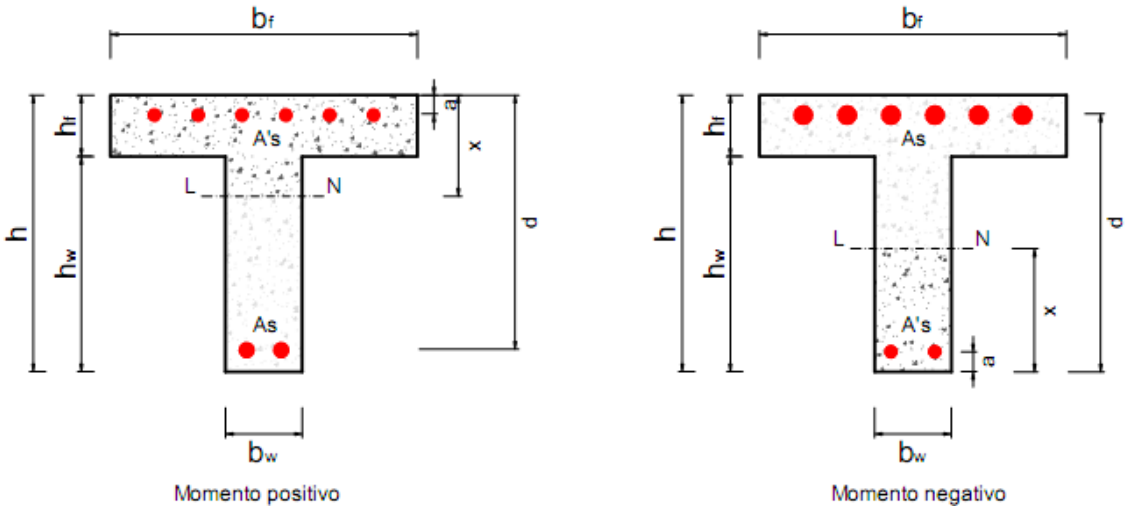


Fig. 2.14 – Secção em T no estado II para momento positivo e negativo

<u>Posição da linha neutra:</u>

No cálculo da posição da linha neutra, em estado II não se considera a contribuição do betão tracionado.

- Momento atuante positivo:

Admitindo LN no banzo:

Através da equação (2.52), vem que:

$$x = \frac{\sum(A_i \cdot d_i)}{\sum A_i} = \frac{\left[b_f \cdot x \cdot \frac{x}{2}\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot d] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot a]}{(b_f \cdot x) + \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)}$$

$$x = \frac{\sqrt{\alpha_e} \cdot \sqrt{\alpha_e \cdot {A_s}^2 + 2 \cdot (\alpha_e \cdot A'_s + b_f \cdot d) \cdot A_s + (2 \cdot a \cdot b_f + \alpha_e \cdot A'_s) \cdot A'_s} - \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)}{b_f} \qquad (2.74)$$

Se: $x > h_f$ então a linha neutra encontra-se na alma e terá de se calcular um novo valor de x admitindo neste caso que a linha neutra se encontra na alma. Vem:

LN na alma:

Através da equação (2.52), vem que:

$$x = \frac{\sum(A_i \cdot d_i)}{\sum A_i} = \frac{\left[b_f \cdot h_f \cdot \frac{h_f}{2}\right] + \left[b_w \cdot (x - h_f) \cdot \left(h_f + \frac{(x - h_f)}{2}\right)\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot d] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot a]}{(b_f \cdot h_f) + [b_w \cdot (x - h_f)] + \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)}$$

$$x = \frac{\left[\sqrt{\alpha_e{}^2 . {A_s}^2 + 2 \cdot \alpha_e \cdot A_s \cdot \left((d - h_f) \cdot b_w + \alpha_e \cdot A'_s + b_f \cdot h_f\right) + \left(2 \cdot \alpha_e \cdot A'_s \cdot a - (2 \cdot \alpha_e \cdot A'_s + b_f \cdot h_f) \cdot h_f\right) \cdot b_w + \left(\alpha_e \cdot A'_s + b_f \cdot h_f\right)^2}\right] - \alpha_e \cdot A_s + b_w \cdot h_f - \alpha_e \cdot A'_s - b_f \cdot h_f}{b_w}$$

(2.75)

- Momento atuante negativo:

De forma análoga ao caso do momento atuante positivo, vem que:

Admitindo LN no banzo:

$$x = \frac{\sum(A_i \cdot d_i)}{\sum A_i} = \frac{\left[b_f \cdot (x-h_w) \cdot \left(h_w + \frac{(x-h_w)}{2}\right)\right] + \left[b_w \cdot h_w \cdot \left(\frac{h_w}{2}\right)\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot d] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot a]}{[b_f \cdot (x-h_w)] + (b_w \cdot h_w) + \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)}$$

$$x = \frac{\left[\sqrt{\alpha_e{}^2 \cdot A_s{}^2 + 2 \cdot (\alpha_e \cdot A'_s + b_f \cdot d + (b_w - b_f) \cdot h_w) \cdot \alpha_e \cdot A_s + 2 \cdot \alpha_e \cdot a \cdot A'_s \cdot b_f + \alpha_e{}^2 \cdot A'_s{}^2 + 2 \cdot \alpha_e \cdot A'_s \cdot (b_w - b_f) \cdot h_w + b_w \cdot (b_w - b_f) \cdot h_w{}^2}\right] - \alpha_e \cdot (A_s + A'_s) - (b_w - b_f) \cdot h_w}{b_f}$$

(2.76)

Se: $x < h_w$, então a linha neutra encontra-se na alma e terá de se calcular um novo valor de x admitindo neste caso que a linha neutra se encontra na alma. Vem:

LN na alma:

$$x = \frac{\sum(A_i \cdot d_i)}{\sum A_i} = \frac{\left[b_w \cdot \frac{x^2}{2}\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot d] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot a]}{(b_w \cdot x) + \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)}$$

$$x = \frac{\sqrt{\alpha_e} \cdot \sqrt{\alpha_e \cdot A_s{}^2 + 2 \cdot (\alpha_e \cdot A'_s + b_w \cdot d) \cdot A_s + (2 \cdot a \cdot b_w + \alpha_e \cdot A'_s) \cdot A'_s} - \alpha_e \cdot (A_s + A'_s)}{b_w} \quad (2.77)$$

<u>Cálculo do momento de inércia, I_{II}:</u>

- Momento atuante positivo:

LN no banzo:

$$I_{II} = \left(\frac{b_f \cdot x^3}{3}\right) + [\alpha_e \cdot A_s \cdot (d-x)^2] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot (x-a)^2] \quad (2.78)$$

LN na alma:

$$I_{II} = \left\{\left[\left(\frac{b_f \cdot h_f{}^3}{12}\right) + (b_f \cdot h_f) \cdot \left(x - \frac{h_f}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{b_w \cdot (x-h_f)^3}{3}\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot (d-x)^2] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot (x-a)^2]\right\} \quad (2.79)$$

- Momento atuante negativo:

De forma análoga ao caso do momento atuante positivo, vem que:

LN no banzo:

$$I_{II} = \left\{\left[\left(\frac{b_w \cdot h_w{}^3}{12}\right) + (b_w \cdot h_w) \cdot \left(x - \frac{h_w}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{b_f \cdot (x-h_w)^3}{3}\right] + [\alpha_e \cdot A_s \cdot (d-x)^2] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot (x-a)^2]\right\} \quad (2.80)$$

LN na alma:

$$I_{II} = \left\{\left(\frac{b_w \cdot x^3}{3}\right) + [\alpha_e \cdot A_s \cdot (d-x)^2] + [\alpha_e \cdot A'_s \cdot (x-a)^2]\right\} \quad (2.81)$$

2.3.4.5. Momento de Inércia médio

É possível determinar um momento de inércia médio da secção I_m. Com base na equação 2.17, vem que:

$$a = (1-\zeta)\cdot a_I + \zeta \cdot a_{II} = \int \frac{M\cdot\bar{M}}{E_{c,eff}\cdot I_I} dx \cdot (1-\zeta) + \int \frac{M\cdot\bar{M}}{E_{c,eff}\cdot I_{II}} dx \cdot \zeta$$

donde:

$$a = \int \frac{M\cdot\bar{M}}{E_{c,eff}} \cdot \left[\frac{(1-\zeta)}{I_I} + \frac{\zeta}{I_{II}}\right] dx$$

Considera-se então um momento de inércia médio, I_m, dado por:

$$\frac{1}{I_m} = \left[\frac{(1-\zeta)}{I_I} + \frac{\zeta}{I_{II}}\right] \Longrightarrow \frac{1}{I_m} = \frac{(1-\zeta)\cdot I_{II} + \zeta\cdot I_I}{I_I\cdot I_{II}}$$

$$\Longrightarrow I_m = \frac{I_I\cdot I_{II}}{(1-\zeta)\cdot I_{II} + \zeta\cdot I_I} \tag{2.82}$$

Desta forma, a deformação pode ser calculada da seguinte forma:

$$a = \int \frac{M\cdot\bar{M}}{E_{c,eff}\cdot I_m} dx \tag{2.83}$$

2.3.5. Exemplo

Nesta secção pretende-se exemplificar com um caso simples o efeito que a fendilhação do betão tem no valor da flecha.

A figura 2.15 mostra a relação, momento – flecha, de uma viga de betão armado simplesmente apoiada com vão de 6 m, de secção retangular ($0.3\,m \times 0.6\,m$), solicitada por uma carga uniformemente distribuída e betão C25/30, armadura inferior: 5Φ20 (15.71 cm^2) e armadura superior: 3Φ12 (3,39 cm^2), considerando o método do EC2. Considerou-se neste exemplo um coeficiente de fluência nulo, ($\varphi = 0$), uma vez que se pretende estudar somente a influência da fendilhação, logo desprezamos os efeitos diferidos do betão, como é o caso da fluência e da retração.

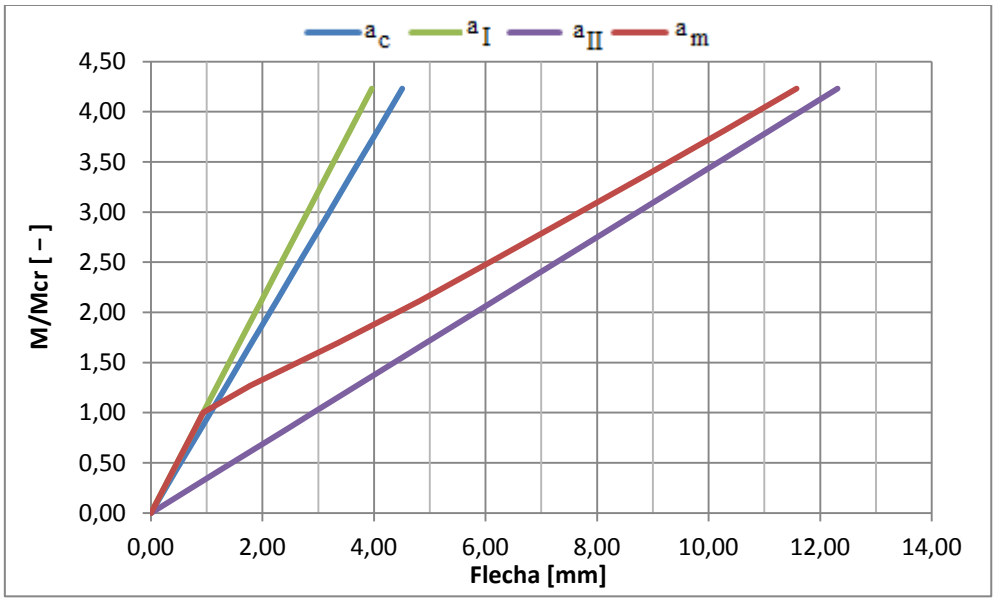


Fig. 2.15 – Influência da fendilhação na deformação

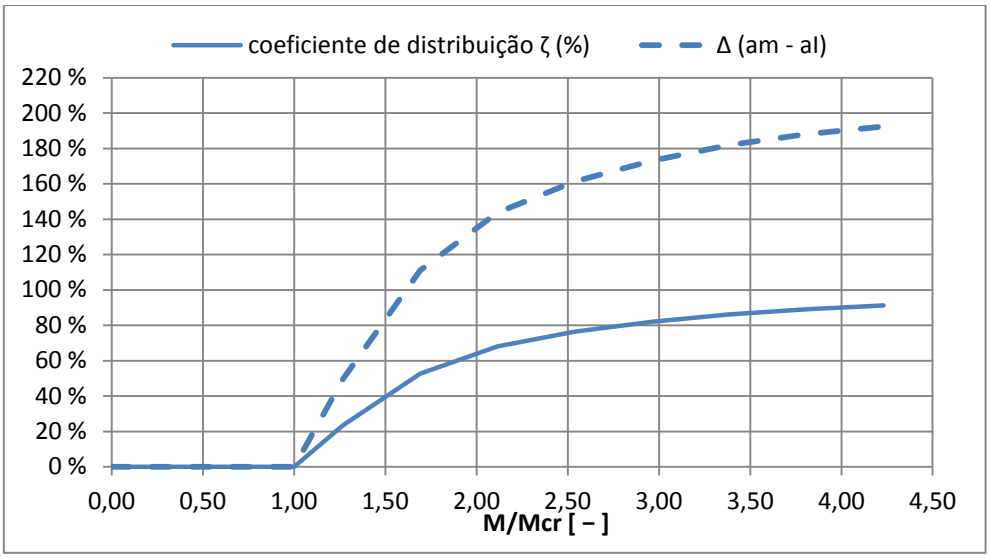


Fig. 2.16 – Nível de fendilhação, em %

Como foi mencionado anteriormente, da análise das figuras 2.15 e 2.16, constata-se que quando o nível de solicitação, para a combinação de ações quase permanente, é inferior ao de fendilhação, ($M \leq M_{cr}$), a secção encontra-se em estado não fendilhado (I), sendo a flecha igual àquela correspondente ao estado I ($a_m = a_I$).

Quando é atingido o momento de fendilhação, ($M/M_{cr} = 1$), a secção começa a fendilhar e quando o valor do momento fletor atuante é o dobro do momento de fendilhação, ($M/M_{cr} = 2$), o coeficiente de distribuição toma o valor $\zeta \cong 0{,}7\ (70\%)$ (Fig. 2.16). O aumento da relação M/M_{cr} de 1 para 2, corresponde, em termos de cargas quase permanentes aplicadas à estrutura, a um aumento de 8,4 kN/m para 16,8 kN/m.

A fendilhação tem uma influência muito grande no valor da flecha. Da análise da figura 2.16 verifica-se que o valor final da flecha tende para valores próximos de 200%, superior àquele que se registaria caso a secção se encontrasse em estado não fendilhado, essa diferença é causada pela fendilhação do betão.

2.4. Efeito da fluência do betão

2.4.1. Noções fundamentais

A fluência corresponde ao aumento gradual da deformação do betão ao longo do tempo sob carga constante.

O Eurocódigo 2 [1] assume que a deformação ao longo do tempo tendo em conta a fluência pode ser definida como a soma de duas partes, uma referente à deformação instantânea, devido à aplicação de uma tensão σ_0 no instante t_0, e a outra devido à fluência, a qual aumenta ao longo do tempo (fig.2.20). Vem então que a deformação do betão a qualquer instante *t*, pode ser expressa da seguinte forma:

$$\varepsilon_{c,t} = \varepsilon_{c0} + \varepsilon_{cc} \tag{2.84}$$

onde:

$\varepsilon_{c,t}$ – deformação no instante *t*;

ε_{c0} – deformação instantânea;

ε_{cc} – deformação devido à fluência (o segundo índice *"c"* vem do inglês "creep" que significa fluência);

A longo prazo ($t = t_\infty$) a deformação toma o valor $\varepsilon_{c\infty}$

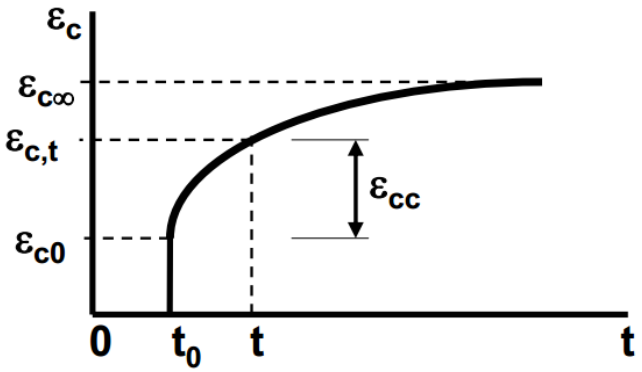


Fig. 2.17 – Deformação devido à fluência em função do tempo [1]

No cálculo de deformações em estruturas de betão armado e pré-esforçadas o efeito da fluência deve ser considerado quando se quer obter o valor dessas variáveis num instante *t* diferente de zero, ou seja, ignora-se o efeito da fluência quando o objetivo é calcular as deformações instantâneas. Isso deve-se, como foi mencionado anteriormente ao facto de a fluência se desenvolver ao longo do tempo. A fluência entra então no cálculo das deformações através de um coeficiente, $\varphi(t,t_o)$, que tem em conta este fenómeno no comportamento dos materiais ao longo do tempo.

O coeficiente de fluência pode ser definido como a relação entre a deformação por fluência e a deformação instantânea [1]:

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t,t_0)}{\varepsilon_{c0}} \tag{2.85}$$

Por sua vez a deformação instantânea, admitindo um comportamento linear, pode ser representada da seguinte forma, aplicando a lei de Hooke:

$$\varepsilon_{c0} = \frac{\sigma_{c0}}{E_c} \tag{2.86}$$

onde:

σ_{c0} – tensão de compressão constante aplicada no instante inicial (t=t_o);

E_c - módulo de elasticidade tangente do betão;

vem então que:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \cdot \left(\frac{\sigma_{c0}}{E_c}\right) \tag{2.87}$$

O coeficiente de fluência é função do módulo de elasticidade tangente, E_c, o qual pode ser escrito em função do módulo de elasticidade secante, E_{cm} [1]. Vem:

$$E_c = 1{,}05\, E_{cm} \tag{2.88}$$

Das expressões anteriores vem que:

$$\varepsilon_{c,t} = \varepsilon_{c0} + \varphi(t, t_0) \cdot \varepsilon_{c0} = \left(1 + \varphi(t, t_0)\right) \cdot \left(\frac{\sigma_{c0}}{E_c}\right) \tag{2.89}$$

para $E_c = 1{,}05 E_{cm}$, vem:

$$\varepsilon_{c,t} = \frac{\sigma_{c0}}{\left(\frac{1{,}05\, E_{cm}}{1+\varphi(t,t_0)}\right)} \tag{2.90}$$

considerando por simplificação:

$$\frac{1{,}05\, E_{cm}}{1+\varphi(t,t_0)} \cong \frac{E_{cm}}{1+\varphi(t,t_0)} = E_{c,eff} \tag{2.91}$$

onde:

E_{eff} – módulo de elasticidade efetivo. Valor do módulo de elasticidade que tem em consideração a deformação total por fluência;

Quando é considerada a fluência no cálculo das deformações, deve ser utilizado o valor do módulo de elasticidade efetivo nas expressões de cálculo das curvaturas assim como na quantificação do coeficiente de homogeneização para a determinação das características geométricas das secções de betão armado.

Vem então que o valor da deformação, no instante *t,* tendo em conta a fluência é dado por:

$$\varepsilon_{c,t} \cong \frac{\sigma_{c0}}{E_{c,eff}} \tag{2.92}$$

Para um instante $t = \infty$, o coeficiente de fluência toma o valor $\varphi(\infty, t_0)$.

O coeficiente de fluência, $\varphi(t, t_0)$, anteriormente mencionado, é calculado admitindo que o betão está submetido a uma tensão de compressão inferior a $0{,}45 \cdot f_{ck}(t_0)$ na idade t_0 aquando do primeiro carregamento. Caso contrário terá de se considerar a não linearidade da fluência e este valor terá de ser substituído por [1]:

$$\varphi_{nl}(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \cdot e^{\left(1{,}5 \cdot (k_\sigma - 0{,}45)\right)} \tag{2.93}$$

onde:

$\varphi_{nl}(t, t_0)$ - coeficiente teórico de fluência não linear, que substitui $\varphi(t, t_0)$;

k_σ - razão tensões-resistências $\sigma_c / f_{ck}(t_0)$, em que σ_c é a tensão de compressão e $f_{ck}(t_0)$ é a resistência característica à compressão do betão à data do carregamento;

2.4.2. Parâmetros que afetam a fluência

A fluência do betão e o seu desenvolvimento ao longo do tempo depende de vários fatores relacionados com a composição do betão, condições ambientais e das condições do carregamento. Em seguida menciona-se alguns dos parâmetros que afetam a fluência do betão:

- idade do betão t_0, em que é aplicada a tensão;
- o instante t em que é medida a deformação;
- tipo de betão e consequentemente, a resistência do betão
- o nível de solicitação aplicada (se $\sigma_{c0} > 0{,}45\ f_{ck}$)
- o tempo de cura do betão;
- geometria da secção;
- humidade relativa (RH);

2.4.3. Cálculo do coeficiente de fluência

Caso não seja necessário grande exatidão, para o valor do coeficiente de fluência, este pode ser determinado através da figura 2.18 desde que a estrutura não esteja sujeita a uma tensão de compressão superior a $0{,}45 \cdot f_{ck}(t_0)$ na idade t_0 aquando do primeiro carregamento. Esta forma de determinação do coeficiente de fluência pode ser consultada no EC2 [1], onde são explicados, de forma mais explícita, os passos indicados na figura abaixo.

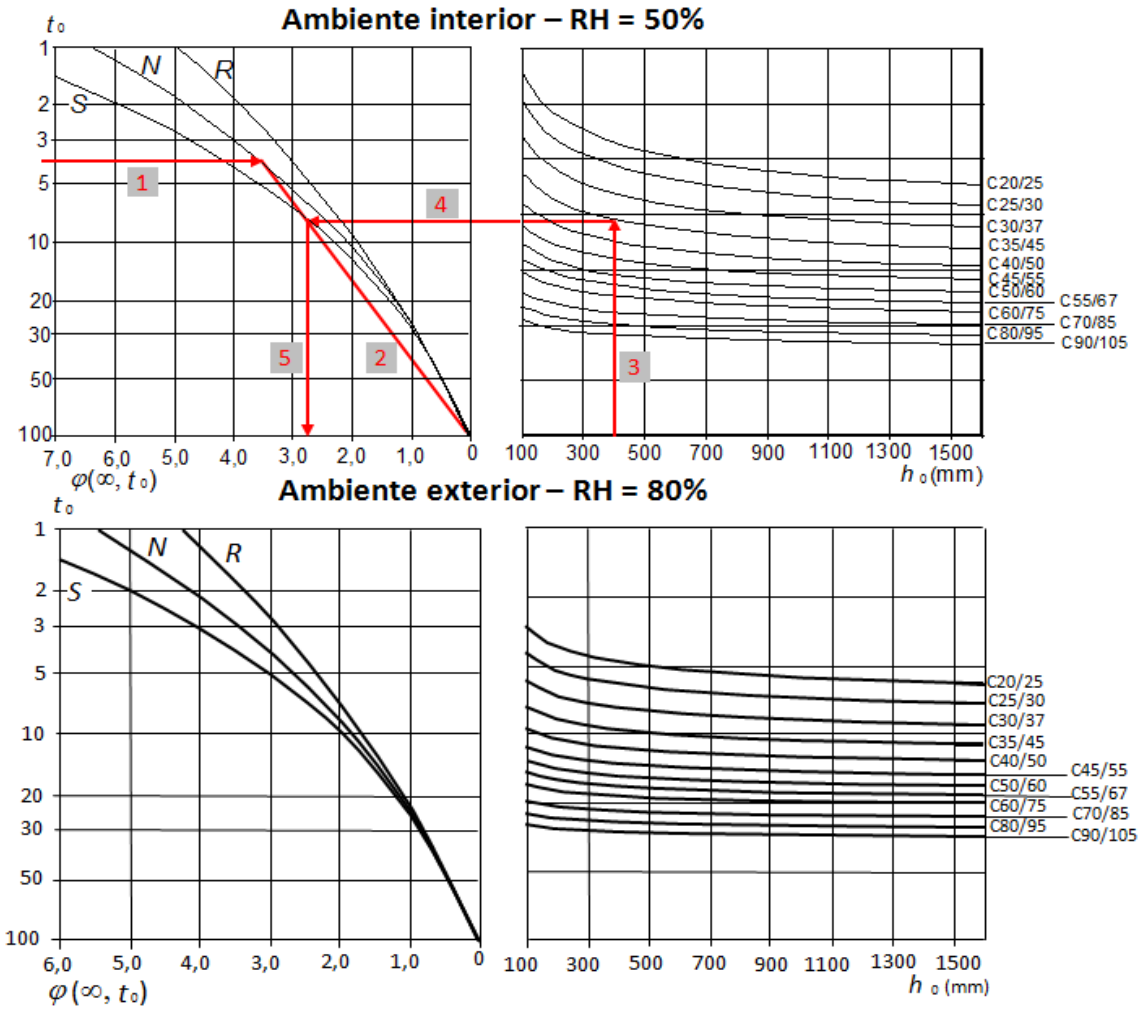


Fig. 2.18 – Determinação do coeficiente de fluência (adaptado do EC2 [1])

Os valores indicados na figura 2.18 são válidos para temperaturas ambientes compreendidas entre -40 ºC e +40 ºC e uma humidade relativa média entre 40% e 100% [1].

Caso haja necessidade de obter um valor, do coeficiente de fluência, mais preciso, o anexo B da EN 1992-1-1, fornece a seguinte metodologia de cálculo:

$$\varphi(t,t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t,t_0) \tag{2.94}$$

onde:

$\varphi(t,t_0)$ – valor final do coeficiente de fluência;

φ_0 - coeficiente de fluência que poderá ser calculado da seguinte forma:

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \tag{2.95}$$

onde:

φ_{RH} – factor que tem em conta a influência da humidade relativa;

$$\begin{cases} \varphi_{RH} = 1 + \frac{1-\frac{RH}{100}}{0{,}1\cdot\sqrt[3]{h_o}} \quad para\ fcm \leq 35MPa \\ \varphi_{RH} = \left[1 + \frac{1-\frac{RH}{100}}{0{,}1\cdot\sqrt[3]{h_o}} \cdot \alpha_1\right] \cdot \alpha_2 \quad para\ fcm > 35MPa \end{cases} \tag{2.96}$$

onde:

f_{cm} - resistência média à compressão do betão;

RH – humidade relativa do meio ambiente em %;

h_o – espessura equivalente do elemento, em mm, em que:

$$h_o = \frac{2\cdot A_c}{u} \tag{2.97}$$

onde:

A_c – área da secção transversal de betão;

u – perímetro da parte da secção exposta à secagem;

α_1, α_2 – coeficientes que têm em conta a influência da resistência do betão:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \left[\frac{35}{f_{cm}}\right]^{0,7} \\ \alpha_2 = \left[\frac{35}{f_{cm}}\right]^{0,2} \end{cases} \tag{2.98 e 2.99}$$

$\beta(f_{cm})$ – factor que tem em conta a influência da resistência do betão no coeficiente de fluência convencional:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16{,}8}{\sqrt{f_{cm}}} \tag{2.100}$$

$\beta(t_0)$ – factor que tem em conta a influência da idade do betão á data do carregamento no coeficiente de fluência:

$$\beta(t_0) = \frac{1}{(0{,}1+t_0^{0,20})} \tag{2.101}$$

onde:

t_0 - idade do betão, em dias, à data do carregamento;

$\beta_c(t,t_0)$ – coeficiente que traduz a evolução da fluência no tempo, após carregamento:

$$\beta_c(t,t_0) = \left[\frac{(t-t_0)}{(\beta_H+t-t_0)}\right]^{0,3} \tag{2.102}$$

com:

t – idade do betão, em dias, na data considerada;

$(t-t_0)$ - duração do carregamento, em dias;

β_H – coeficiente que depende de RH(%) e de h_0 (mm):

$$\begin{cases} \beta_H = 1{,}5 \cdot [1+(0{,}012 \cdot RH)^{18}] \cdot h_0 + 250 \leq 1500 \quad para\ f_{cm} \leq 35\ MPa \\ \beta_H = 1{,}5 \cdot [1+(0{,}012 \cdot RH)^{18}] \cdot h_0 + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3 \quad para\ f_{cm} > 35\ MPa \end{cases} \tag{2.103}$$

onde:

α_3 - coeficiente que tem em conta a influência da resistência do betão:

$$\alpha_3 = \left[\frac{35}{f_{cm}}\right]^{0,5} \tag{2.104}$$

2.4.4. Exemplo

Nesta secção pretende-se exemplificar com um caso simples o efeito da fluência no valor da flecha.

A figura 2.19 mostra a relação, coeficiente de fluência – flecha, de uma viga de betão armado simplesmente apoiada com vão de 6 m, de secção retangular ($0.3\ m \times 0.6\ m$), solicitada por uma carga uniformemente distribuída e betão C25/30, armadura inferior: 5Φ20 (15.71 cm^2) e armadura superior: 3Φ12 (3,39 cm^2).

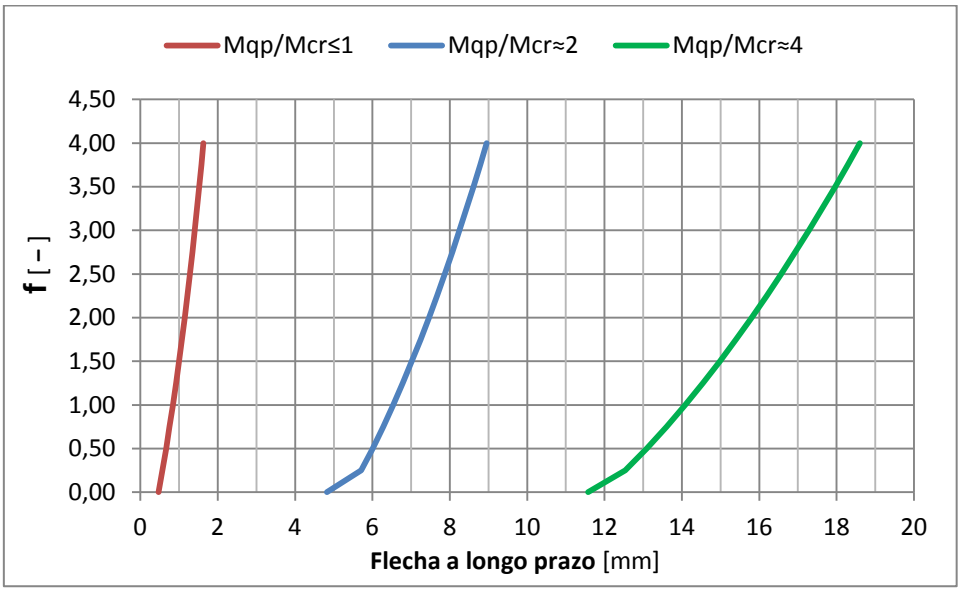


Fig. 2.19 – Efeito da fluência na flecha a longo prazo

Neste exemplo, observa-se, pela análise da figura 2.19, que a influência do coeficiente de fluência no valor da flecha se pode traduzir num comportamento aproximadamente linear. Ou seja, a flecha aumenta "linearmente" com o aumento do coeficiente de fluência. Para um valor da carga quase permanente de 44,0 kN/m ($M/M_{cr} \cong 4$) e coeficiente de fluência, $\varphi = 2{,}5$, o valor da flecha a longo prazo é aproximadamente 40% superior ao da flecha instantânea ($\varphi = 0$).

No caso em que $M/M_{cr} \cong 2$ em vez de 40% temos 60% e para $M/M_{cr} \leq 1$ temos um aumento da flecha de 170% em relação à flecha instantânea. Dito isto constata-se que quanto menor for a relação M/M_{cr} maior é a influência da fluência na deformação.

No caso em que $M/M_{cr} \leq 1$, se não existissem armaduras de compressão ($A'_s = 0$) e as armaduras de tração fossem igual à armadura mínima ($A_s = A_{s,min}$), teríamos um aumento da flecha a longo prazo de ($\cong \varphi \times 100$) %.

No capítulo 5.2 será feita uma análise do efeito da fluência na deformação, para outros casos distintos do presente nesta secção.

2.5. Efeito da retração do betão

A retração do betão pode ser definida como um encurtamento gradual do material durante o seu endurecimento, resultando portanto numa diminuição gradual do volume do elemento de betão.

2.5.1. Tipos de retração

Enumera-se em seguida os principais tipos de retração do betão [6]:

- **Retração plástica** – este tipo de retração dá-se devido à evaporação da água na superfície livre de betão logo após a betonagem. Ocorre portanto na fase de betão fresco e pode ser controlada através de uma cura, compactação e composição do betão convenientes de forma a proteger o elemento de betão contra a evaporação.

- **Retração autogénea** – também chamada de auto-dessecação, ou simplesmente retração de hidratação; este tipo de retração está associado à hidratação do cimento, desenvolvendo-se principalmente nos primeiros dias de curas do betão. Ocorre quando não há trocas de humidade com o exterior havendo então um consumo interno de água durante a hidratação do cimento. Este tipo de retração aumenta à medida que a relação água/cimento (*a/c*) diminui.

- **Retração por carbonatação** – este tipo de retração ocorre devido à reação do dióxido de carbono (CO_2) do ar com o hidróxido de cálcio ($Ca(OH)_2$) presente na pasta de cimento, formando carbonato de cálcio ($CaCO_3$).

  $$Ca(OH)_2 + CO_2 \Longrightarrow CaCO_3 + H_2O$$

  Neste caso a retração começa à superfície do betão e vai-se dirigindo para o interior à medida que a carbonatação avança.

- **Retração por secagem** – resulta da migração da água do interior do betão para a superfície exposta à secagem. Este é um processo que evolui lentamente e dura vários anos até que o betão esteja totalmente seco. Esta é a parcela mais importante na deformação por retração do betão.

2.5.2. Cálculo da extensão por retração do betão, ε_{cs}

De acordo com o Eurocódigo 2 [1], o cálculo do valor da extensão total por retração do betão, ε_{cs}, é dado pela soma das duas principais parcelas da deformação por retração do betão, são elas: a retração por secagem, ε_{cd}, e a retração autogénea, ε_{ca}.

Assim o valor da extensão total por retração é dado por:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} \tag{2.105}$$

onde:

ε_{cs} - extensão total de retração;

ε_{cd} - extensão de retração por secagem;

ε_{ca} - extensão de retração autogénea;

2.5.2.1. Extensão de retração por secagem

O valor final da extensão de retração por secagem é dado pela seguinte equação;

$$\varepsilon_{cd}(\infty) = k_h \cdot \varepsilon_{cd,0} \tag{2.106}$$

onde:

$\varepsilon_{cd}(\infty)$ - valor final da extensão de retração por secagem;

k_h - coeficiente que depende da espessura equivalente, h_0, de acordo com quadro 6.1;

h_0 (mm)	k_h
100	1,0
200	0,85
300	0,75
≥500	0,70

Tabela 2.1 – Valores de k_h (adaptado do EC2 [1])

onde h_0 é definido pela expressão (2.97).

$\varepsilon_{cd,0}$ – extensão de retração por secagem de referência:

$$\varepsilon_{cd,0} = 0{,}85 \cdot \left[(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot e^{\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right)}\right] \cdot 10^{-6} \cdot \beta_{RH} \tag{2.107}$$

onde:

β_{RH} - coeficiente que depende da humidade relativa (RH):

$$\beta_{RH} = 1{,}55 \cdot \left[1 - \left(\frac{RH}{RH_0}\right)^3\right] \tag{2.108}$$

em que:

RH – humidade relativa ambiente (%);

RH_0 = 100%;

f_{cm} - valor médio da tensão de rotura do betão à compressão (MPa);

f_{cm0} = 10 MPa;

$\alpha_{ds1}, \alpha_{ds2}$ – coeficientes que dependem do tipo de cimento:

- cimento da Classe S $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{ds1} = 3 \\ \alpha_{ds2} = 0{,}13 \end{cases}$;

- cimento da Classe N $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{ds1} = 4 \\ \alpha_{ds2} = 0{,}12 \end{cases}$;

- cimento da Classe R $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{ds1} = 6 \\ \alpha_{ds2} = 0{,}11 \end{cases}$;

2.5.2.2. Extensão de retração autogénea:

O valor final da extensão de retração autogénea é dado pela seguinte equação:

$$\varepsilon_{ca}(\infty) = 2{,}5 \cdot (f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6} \tag{2.109}$$

onde:

$\varepsilon_{ca}(\infty)$ - valor final da extensão de retração autogénea;

f_{ck} – valor característico da resistência à compressão do betão (MPa);

2.5.3. Curvatura devido à retração

No caso de elementos de betão, não armados, a retração desenvolve-se uniformemente na altura da secção.

Já no caso de elementos de betão armado a armadura restringe o efeito da retração, reagindo com uma força igual à força de compressão (*N*) que a retração do betão lhe impõe [9]. E no caso de essa armadura ser assimétrica ao longo da secção, surge no betão, por equilíbrio, uma força *N* e um momento *M*, resultando neste caso uma curvatura imposta devido à retração, a qual se desenvolve ao longo do tempo.

Considere-se uma viga de betão armado sujeita a uma deformação por retração ε_{cs}. A força de compressão que a retração do betão impõe à armadura é dada por:

$$N = -\varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \tag{2.110}$$

A armadura reage à força de compressão com uma força de igual valor ao nível da armadura, resultando no betão um momento M devido à excentricidade dessa força, em relação à linha neutra (Fig. 2.20):

$$M = N \cdot e = \varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \cdot (d - x) \tag{2.111}$$

Com base na equação (2.5), vem que a curvatura devido à retração é dada por:

$$\frac{1}{r_{cs}} = \frac{M}{E_{c,eff} \cdot I} = \frac{\varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \cdot (d-x)}{E_{c,eff} \cdot I} \tag{2.112}$$

resulta:

$$\frac{1}{r_{cs}} = \varepsilon_{cs} \cdot \alpha_e \cdot \frac{S}{I} \tag{2.113}$$

onde:

ε_{cs} – extensão por retração (§2.5.2);

α_e - coeficiente de homogeneização (§2.3.4);

I - momento de inércia da secção não fendilhada ou fendilhada;

S - momento estático da armadura em relação à linha neutra:

$$S = A_s \cdot (d - x) - A'_s \cdot (x - a) \tag{2.114}$$

onde:

A_s - armadura tracionada;

A'_s - armadura de compressão;

x – distância da fibra mais comprimida à linha neutra;

d – altura útil da secção;

a - distância da fibra mais comprimida ao centro da armadura de compressão;

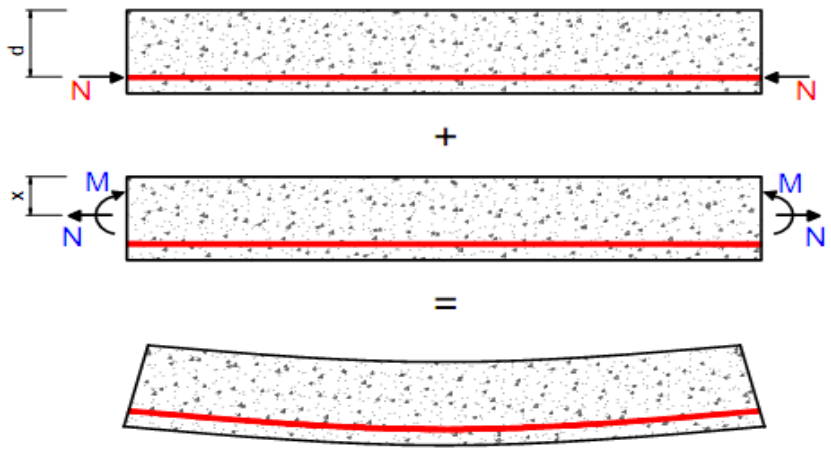


Fig. 2.20 – Exemplo do efeito da retração numa viga de betão armado

2.5.4. Exemplo

Nesta secção pretende-se exemplificar com um caso simples o efeito da retração no valor da flecha.

A figura 2.21 mostra a relação, extensão total de retração – flecha devido à retração, de uma viga de betão armado simplesmente apoiada com vão de 6 m, de secção retangular $(0.3\,m \times 0.6\,m)$, solicitada por uma carga quase permanente $p_{qp} = 44{,}0\,kN$, betão C25/30, armadura inferior: 5Φ20 (15.71 cm^2) e armadura superior: 3Φ12 (3,39 cm^2).

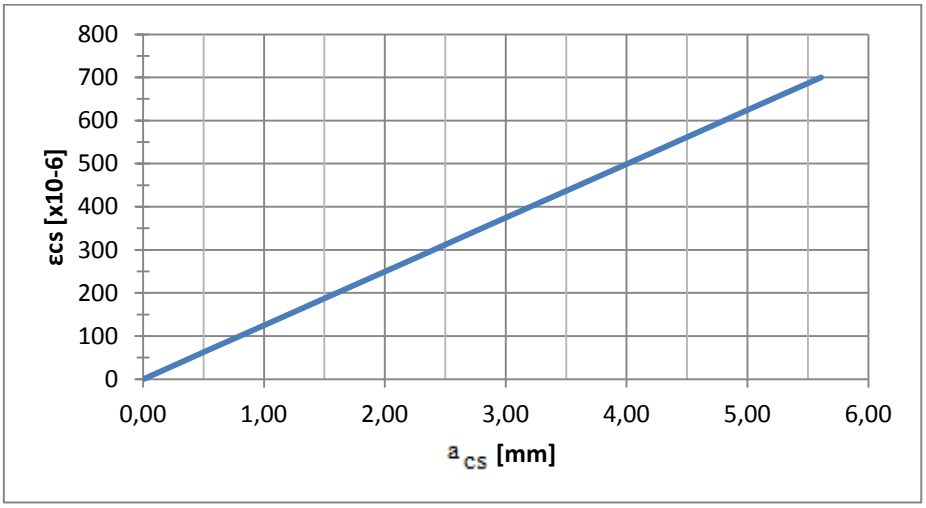


Fig. 2.21 – Variação da flecha devido à retração, a_{cs}

Da análise da figura 2.21 constata-se que a flecha devido à retração, a_{cs}, é linearmente dependente da extensão total de retração, ε_{cs}, o que seria de esperar da análise da expressão (2.113).

Neste exemplo, podemos constatar que para valores da retração de 300×10^{-6} a flecha é de aproximadamente $2{,}5\,mm$, isto é L/2400, valor que é cerca de 10% da flecha limite.

Na secção 5.3 será feita uma análise do efeito da retração na deformação, para outros casos distintos do presente nesta secção.

2.6. Regras práticas para a dispensa do cálculo da flecha

No caso de estruturas correntes, geralmente, não é necessário um cálculo rigoroso das flechas. Em tais casos é normal recorrer a regras simples, que quando satisfeitas assume-se que a estrutura em estudo respeita o estado limite de deformação. Um exemplo, é a limitação da relação vão/altura útil (L/d) de forma a evitar, em condições normais de serviço, problemas relacionados com a deformação. Desde que a estruturas, vigas ou lajes de betão armado, sejam dimensionadas de forma a respeitar tais limites, poderá garantir-se que a respetiva flecha não irá exceder o valor limite L/250, referido na secção 2.1.2.

O Eurocódigo 2 [1] apresenta as seguintes expressões que limitam a relação vão/altura útil de forma a garantir a segurança ao estado limite de deformação dispensando o cálculo da flecha:

Se $\rho \leq \rho_0$:

$$\frac{L}{d} = K\left[11 + 1{,}5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} + 3{,}2 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)^{3/2}\right] \tag{2.115}$$

Se $\rho > \rho_0$:

$$\frac{L}{d} = K\left[11 + 1{,}5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}}\right] \tag{2.116}$$

onde:

$\frac{L}{d}$ - valor limite da relação vão/altura útil;

K - coeficiente que tem em conta os diferentes sistemas estruturais (tabela 2.2);

ρ_0 – taxa de armadura de referência $\left(= 10^{-3}\sqrt{f_{ck}}\right)$;

ρ – taxa de armadura de tração necessária a meio vão (ou no apoio no caso de consolas) para equilibrar o momento devido às ações de cálculo;

ρ' – taxa de armadura de compressão necessária a meio vão (ou no apoio no caso de consolas) para equilibrar o momento devido às ações de cálculo;

f_{ck} - Valor característico da resistência à compressão do betão (MPa);

As expressões (2.115) e (2.116) foram obtidas admitindo que a tensão no aço, para as ações no estado limite de utilização, é igual a 310 MPa (o que corresponde a um aço A500, onde: $f_{yk} = 500$ MPa). Para outros níveis de tensão, ou no caso de o aço a ser utilizado ser A400, o valor obtido pelas expressões anteriores deverá ser multiplicado por:

$$310/\sigma_s \cong 500/\left(f_{yk} \cdot A_{s,req}/A_{s,prov}\right) \tag{2.117}$$

onde:

σ_s – tensão de tração no aço a meio vão (ou no apoio no caso de consolas) para a combinação de ações quase permanentes;

$A_{s,prov}$ – área da armadura tracionada existente na secção;

$A_{s,req}$ – área da armadura tracionada necessária na secção no estado limite último;

No caso de secções em T com uma relação entre a largura do banzo e a largura da alma superior a 3, os valores de L/d, obtidos pelas expressões (2.115 e 2.116), deverão ser multiplicados por 0,8 [1].

Para elementos que não respeitem estes limites de esbelteza, L/d, ou que seja necessário respeitar outros limites que não estes, terá de se fazer uma análise mais rigorosa através de métodos de cálculo, como aqueles expostos no capítulo 3. No capítulo 4 é exemplificada a aplicação destes métodos para o cálculo da flecha em vigas de betão armado.

Os valores obtidos, através da metodologia acima descrita, são valores conservativos, podendo por vezes o cálculo revelar que é possível utilizar elementos mais esbeltos.

Apresenta-se, na tabela 2.2, valores básicos para o limite de esbelteza, L/d, assim como os valores K, coeficiente que tem em conta o tipo de sistema estrutural, para vigas de betão armado sem esforço normal de compressão.

Sistema estrutural	**K**	**Betão fortemente solicitado** $\boldsymbol{\rho = 1,5\%}$	**Betão levemente solicitado** $\boldsymbol{\rho = 0,5\%}$
Viga simplesmente apoiada	1,0	14	20
Vão extremo de uma viga contínua	1,3	18	26
Vão interior de uma viga continua	1,5	20	30
Viga em consola	0,4	6	8

Tabela 2.2 – Valores máximos de L/d e valores do coeficiente K, em vigas de betão armado sem esforço normal de compressão (adaptado do EC2 [1])

Os valores de L/d da tabela 2.2, resultam das equações (2.115 e 2.116), para casos correntes, em que os materiais são: betão C25/30 e aço A500 (σ_s = 310 MPa). Os valores de K apresentados são os recomendados pelo Eurocódigo 2, sendo que os valores deste coeficiente podem variar consoante o país, neste caso os valores de K poderão ser indicados no respetivo Anexo Nacional do Eurocódigo 2 [1].

As expressões (2.115 e 2.116) resultam de um estudo paramétrico, o qual pode ser consultado em [10]. Este estudo tem em conta a influência de vários parâmetros no limite de esbelteza, L/d.

Capítulo 3

Cálculo da deformação em estruturas de betão armado

3.1. Cálculo por integração numérica

A deformação (rotação ou flecha) em qualquer ponto da estrutura pode ser obtida por integração da curvatura, através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais:

$$a = \int \frac{1}{r} \cdot \bar{M}\, dx \tag{3.1}$$

Nos exemplos expostos na secção 2.2.1, recorreu-se a este método para o cálculo da flecha elástica. Nesses exemplos considerou-se um comportamento linear da estrutura e secções homogéneas de betão, sem ter em conta as armaduras. O mesmo método pode ser aplicado tendo em conta a presença de armaduras, a fendilhação e os efeitos diferidos do betão.

A equação (3.1) pode ser reescrita em função da curvatura média:

$$a = \int \left(\frac{1}{r_m} \cdot \bar{M}\right) dx \Longrightarrow a = \int \left[\left((1-\zeta) \cdot \frac{1}{r_I} + \zeta \cdot \frac{1}{r_{II}}\right) \cdot \bar{M}\right] dx \tag{3.2}$$

A dificuldade deste método está na determinação da curvatura média, $\frac{1}{r_m}$, a qual pode ser calculada de acordo com a equação (2.31). Na secção 2.3.4 explica-se a forma como se obtém o valor da curvatura média de acordo com a norma europeia em vigor.

O integral da equação (3.2) pode ser calculado recorrendo a um método numérico, como por exemplo o método de Simpson. O qual é definido da seguinte forma:

$$a = \int \left(\frac{1}{r_m} \cdot \bar{M}\right) dx = \int f\, dx \tag{3.2}$$

$$\int f\, dx = \frac{\Delta x}{3} \cdot [f_1 + 4 \cdot (f_2 + f_4 + f_6 + \cdots) + 2 \cdot (f_3 + f_5 + f_7 + \cdots) + f_n] \tag{3.3}$$

Onde:

f_i - valor da função f na secção $i = 1,2,3, \ldots, n$;

Δx – espaçamento entre duas secções de estudo consecutivas;

O cálculo segundo este método é moroso e na maioria dos casos requer o uso do computador. Nos exemplos de aplicação expostos na secção 4, calculados segundo este método, recorreu-se ao programa Microsoft Office Excel 2007.

3.2. Métodos simplificados

Como o cálculo da deformação através do método de integração numérica é um processo moroso e é quase que obrigatório o recurso a ferramentas de cálculo como é o caso do Excel, apresenta-se neste capítulo alguns métodos aproximados que visam sobretudo simplificar o cálculo da deformação.

Os métodos a seguir descritos são principalmente válidos para estruturas de inércia constante, podendo no entanto ser aplicados a estruturas de inércia variável [6].

3.2.1. Método bilinear

Este método foi desenvolvido nos finais da década de 70 princípios de 80 e está publicado no Bulletin d'Information Nº 143 do CEB [7]. A aplicação deste método está limitada ao cálculo da flecha em estruturas de betão principalmente sujeitas a esforços de flexão sem esforço normal (flexão simples).

O método baseia-se na assunção da bilinearidade da relação momento – flecha (Fig. 3.1), no estado de serviço, que representa uma lei ponderada das relações momento-curvatura.

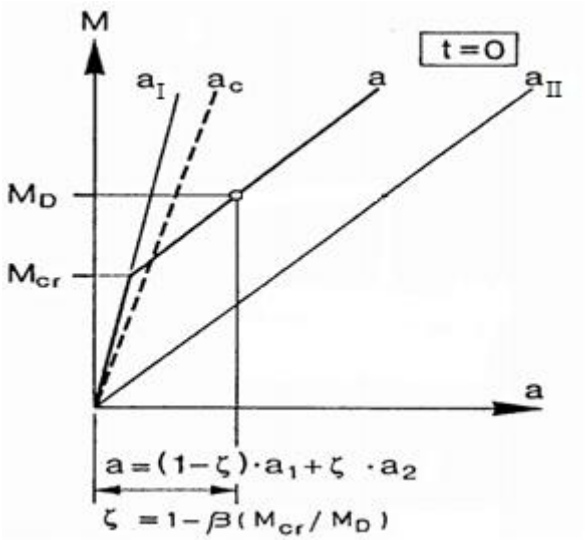


Fig. 3.1 – Relação bilinear momento-flecha [11]

O método consiste no cálculo das flechas extremas, a_I e a_{II}, em estado I e II, respetivamente, a partir da flecha elástica, a_c (resultante do cálculo elástico considerando a secção "cheia" de betão $(EI = (EI)_c)$, desprezando a presença de armaduras), multiplicando esta por coeficientes de correção k (anexo A2). No cálculo dos valores extremos, a_I e a_{II}, considera-se somente as características da secção determinante (secção de momentos positivos máximos no vão e na secção de encastramento no caso de consolas), desprezando desta forma a variação da armadura e da solicitação ao longo do elemento.

Desprezando a contribuição do efeito da retração, os valores extremos da flecha, segundo este métodos, são calculados através das seguintes expressões:

$$\begin{cases} a_I = k_{s1} \cdot \left(1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi\right) \cdot a_c \\ \\ a_{II} = k_{s2} \cdot \left(1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi\right) \cdot a_c \end{cases} \qquad (3.4 \text{ e } 3.5)$$

onde:

a_c – flecha elástica (valor tabelado – anexo A1);

φ - coeficiente de fluência, que toma o valor, $\varphi = 0$, para deformações instantâneas (§ 2.4);

k – coeficientes de correção da curvatura elástica, calculados admitindo uma percentagem média de armadura de tração ρ_m. (anexo A2).

Na determinação dos coeficientes de correção que têm em conta a fluência, k_φ, surge um coeficiente de envelhecimento, χ [12], que pode ser admitido igual a 0,8 [6].

A percentagem média de armadura que serve de base à determinação dos valores dos coeficientes k, é obtida através da seguinte expressão:

$$\rho_m = \rho_a \cdot \frac{L_a}{\mathrm{L}} + \rho_0 \cdot \frac{L_0}{L} + \rho_b \cdot \frac{L_b}{L} \tag{3.6}$$

onde:

ρ_a, ρ_b – percentagem de armadura de tração sobre o apoio (armadura superior);

ρ_0 – percentagem de armadura de tração no vão (armadura inferior);

L_a, L_b, L_0 e L – estão indicados na figura 3.2;

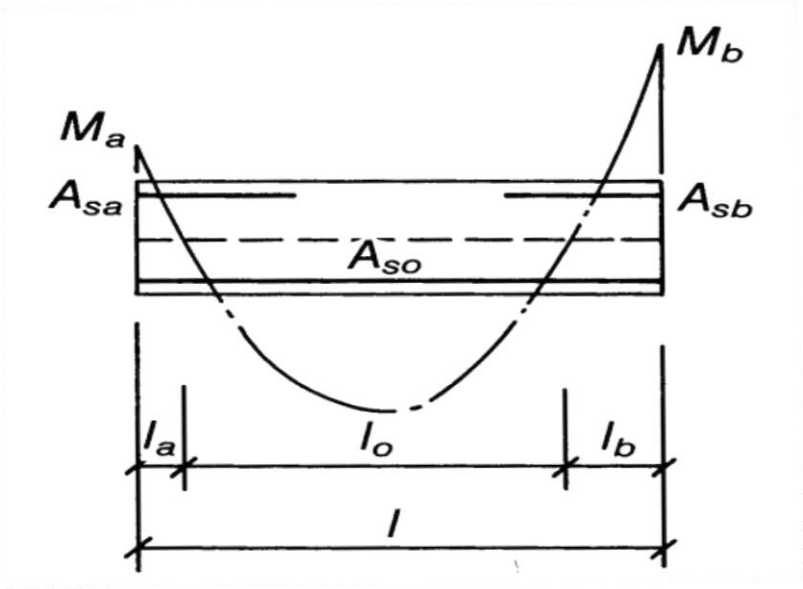


Fig. 3.2 – Diagrama de momentos definindo l_0, l_a e l_b para o cálculo de ρ_m (retirado de [6])

Uma vez obtido o valor das flechas em estado I e II, obtém-se o valor aproximado da flecha, através da equação (2.17), aqui reescrita:

$$a = (1 - \zeta) \cdot a_I + \zeta \cdot a_{II}$$

3.2.2. Método dos coeficientes globais [6]

Este método baseia-se no método bilinear exposto anteriormente, sendo no entanto um método mais expedito que o anterior. O valor estimado da flecha é calculado a partir da flecha elástica, corrigida por meio de coeficientes globais de correção que têm em conta a contribuição das armaduras, a fendilhação e a fluência.

O cálculo da flecha a longo prazo, por este método, é efetuado através da seguinte equação:

$$a = k_t \cdot k'_s \cdot a_c \tag{3.7}$$

onde:

k_t – coeficiente global de correção que tem em conta o nível de solicitação $\left({M_{cr}}/{M}\right)$, a armadura de tração e a fluência;

k'_s – coeficiente global de correção que tem em conta a influência da armadura de compressão;

Os valores dos coeficientes k_t e k'_s, podem ser obtidos através dos ábacos expostos no anexo A3.

A determinação da percentagem média de armadura de tração e compressão, ρ_m e ρ'_m, respetivamente, necessárias para a determinação dos coeficientes globais, é efetuada recorrendo à equação (3.6), sendo que no caso da armadura de compressão terá de se fazer os ajustes necessários a essa equação, tendo em conta a armadura de compressão e não de tração.

3.2.3. Método Model Code CEB-FIP 1990

O método apresentado pelo Model Code 1990 (MC90) [3] é baseado no método dos coeficientes globais, mediante algumas simplificações suplementares. Este método visa facilitar ainda mais o cálculo da flecha em estrutura betão armado. Em resultado de diversos estudos paramétricos efetuados sobre os coeficientes globais de correção k, mostrou-se que estes dependem essencialmente dos seguintes parâmetros [6]:

- *d/h* – relação entre a altura útil e a altura total da secção;
- $\alpha \cdot \rho_m$ – com $\alpha = \frac{E_s}{E_c}$ e ρ_m, percentagem média de armadura de tração;
- ${\rho'_m}/{\rho_m}$ – relação entre as percentagens médias de armadura de compressão e de tração;
- φ – coeficiente de fluência;
- χ – coeficiente de envelhecimento;

De forma a que a determinação dos coeficiente de correção seja independente da percentagem média de armadura de compressão, este método introduz um fator, $(1 - 20 \cdot \rho'_m)$, que visa desta forma facilitar a determinação dos coeficientes de correção.

Com o objetivo de simplificar ainda mais os cálculos este método admite que os seguintes parâmetros, tomam valores considerados correntes:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{E_s}{E_c} \cong 7 \\ \varphi = 2{,}5 \\ \chi = 0{,}8 \end{cases}$$

Vem então que o coeficiente global de correção pelo método adotado no MC90, é dado por:

$$k = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot (1 - 20 \cdot \rho'_m) \tag{3.8}$$

Para outros valores do coeficiente de fluência diferentes de 2,5, este coeficiente poderá ser multiplicado por um fator de correção,η_φ relativo à fluência [3]:

$$\eta_\varphi = \frac{6{,}2+\varphi}{8{,}7} \tag{3.9}$$

Vem então que a estimativa da flecha a longo prazo, pelo método MC90, é:

$$\begin{cases} a = (1+\varphi) \cdot a_c & para \quad M < M_{cr} \\ a = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot \eta_\varphi \cdot (1 - 20 \cdot \rho'_m) \cdot a_c & para \quad M \geq M_{cr} \end{cases} \tag{3.10 e 3.11}$$

Onde:

M – momento atuante no vão, ou no encastramento no caso de consolas, para a combinação de ações quase-permanente;

M_{cr} – momento de fendilhação (§ 2.3.4);

a_c – flecha elástica (anexo A1);

φ – coeficiente de fluência (§ 2.4);

ρ'_m – percentagem média de armadura de compressão

$$\rho'_m = \rho'_a \cdot \frac{L_a}{L} + \rho'_0 \cdot \frac{L_0}{L} + \rho'_b \cdot \frac{L_b}{L} \tag{3.12}$$

η – fator de correção (tabela 3.1), que inclui os efeitos da fendilhação e fluência (com $\varphi = 2{,}5$);

$\boldsymbol{\rho_m}$ (%)	0,15	0,20	0,30	0,50	0,75	1,00	1,50
$\boldsymbol{\eta}$	10	8	6	4	3	2,5	2

Tabela 3.1 – Fatores de correção η

η_φ - fator de correção tendo em conta a fluência;

ρ_m – percentagem média de armadura de tração;

3.2.4. Método da secção determinante [9]

Este método considera apenas as características da secção considerada determinante no cálculo da flecha. Esta secção corresponde à secção de máximo momento positivo, sendo que no caso de consolas a secção a ter em conta é a secção de encastramento. Ao efetuar esta simplificação está-se a admitir que as características: momentos de inércia, curvaturas, armadura e coeficiente de distribuição ζ, são constantes ao longo do elemento e iguais às da secção determinante.

Com base na equação (2.17), o valor estimado da flecha, calculado pelo método da secção determinante é obtido através da seguinte equação:

$$a = (1 - \zeta) \cdot a_{I,D} + \zeta \cdot a_{II,D} \tag{3.13}$$

onde:

ζ – coeficiente de distribuição calculado para a secção determinante;

$a_{I,D}$, $a_{II,D}$ – flechas nos estados I e II considerando as características da secção determinante;

Os valores extremos das flechas, $a_{I,D}$ e $a_{II,D}$, podem ser calculados por integração das curvaturas em estado I e II, respetivamente, através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais de acordo com a equação (3.1). As flechas em estado I e II, são dadas por:

$$\begin{cases} a_{I,D} = \int \frac{1}{r_I} \cdot \bar{M}\, dx = \int \frac{M_D \cdot \bar{M}}{E_{c,eff} \cdot I_I}\, dx \\ a_{II,D} = \int \frac{1}{r_{II}} \cdot \bar{M}\, dx = \int \frac{M_D \cdot \bar{M}}{E_{c,eff} \cdot I_{II}}\, dx \end{cases} \tag{3.14a e 3.15a}$$

Como se considera que as características das secções ao longo do elemento são constantes e iguais às características da secção determinante, equivale a dizer que a rigidez de flexão nos estados I e II é constantes, podendo assim sair fora do integral:

$$\begin{cases} a_{I,D} = \int (M_D \cdot \bar{M})\, dx \cdot \frac{1}{E_{c,eff} \cdot I_I} \\ a_{II,D} = \int (M_D \cdot \bar{M})\, dx \cdot \frac{1}{E_{c,eff} \cdot I_{II}} \end{cases} \tag{3.14b e 3.15b}$$

Multiplicando e dividindo os segundos membros pela rigidez de flexão elástica, $(E_{cm} \cdot I_c)$, correspondente à hipótese de a secção ser "cheia" de betão, sem ter em conta as armaduras, vem:

$$\begin{cases} a_{I,D} = \int (M_D \cdot \bar{M})\, dx \cdot \frac{1}{E_{c,eff} \cdot I_I} \cdot \frac{E_{cm} \cdot I_c}{E_{cm} \cdot I_c} \\ a_{II,D} = \int (M_D \cdot \bar{M})\, dx \cdot \frac{1}{E_{c,eff} \cdot I_{II}} \cdot \frac{E_{cm} \cdot I_c}{E_{cm} \cdot I_c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{I,D} = \int \left(\frac{M_D \cdot \bar{M}}{E_{cm} \cdot I_c}\right) dx \cdot \frac{E_{cm} \cdot I_c}{E_{c,eff} \cdot I_I} \\ a_{II,D} = \int \left(\frac{M_D \cdot \bar{M}}{E_{cm} \cdot I_c}\right) dx \cdot \frac{E_{cm} \cdot I_c}{E_{c,eff} \cdot I_{II}} \end{cases} \tag{3.14c e 3.15c}$$

Como se viu anteriormente a flecha elástica (§ 2.2), é dada por:

$$a_c = \int \left(\frac{M \cdot \overline{M}}{E_{cm} \cdot I_c}\right) dx$$

Vem então que os valores extremos, $a_{I,D}$ e $a_{II,D}$,podem ser calculados em função da flecha elástica, tendo em conta as característica da secção determinante, da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{I,D} = \frac{E_{cm} \cdot I_c}{E_{c,eff} \cdot I_I} \cdot a_c \\ \\ a_{II,D} = \frac{E_{cm} \cdot I_c}{E_{c,eff} \cdot I_{II}} \cdot a_c \end{cases} \qquad (3.16 \text{ e } 3.17)$$

Com base no exposto na secção 2.3.4, vem que:

Deformação instantânea:

$$\begin{cases} a_{I,0} = \frac{I_c}{I_I} \cdot a_c \\ \\ a_{II,0} = \frac{I_c}{I_{II}} \cdot a_c \end{cases} \qquad (3.18 \text{ e } 3.19)$$

Deformação a longo prazo:

$$\begin{cases} a_{I,\infty} = \frac{(1+\varphi) \cdot I_c}{I_I} \cdot a_c \\ \\ a_{II,\infty} = \frac{(1+\varphi) \cdot I_c}{I_{II}} \cdot a_c \end{cases} \qquad (3.20 \text{ e } 3.21)$$

Com os momentos de inércia, I_I e I_{II}, calculados para a secção determinante homogeneizada.

O valor aproximado da flecha, considerando as características da secção determinante, pode ser determinado em função do momento de inércia médio, I_m (§ 2.3.4.5), da seguinte forma:

Deformação instantânea:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_{m0}} \cdot a_c \qquad (3.22)$$

Deformação a longo prazo:

$$a_\infty = (1 + \varphi) \cdot \frac{I_c}{I_{m\infty}} \cdot a_c \qquad (3.23)$$

3.3. Método da secção determinante (MSD) vs Método de integração numérica (MIN)

Nesta secção apresenta-se um estudo comparativo entre o método da secção determinante (MSD) e o método de integração numérica (MIN), enunciados anteriormente.

Com este estudo pretende-se tirar conclusões acerca da eficiência do MSD no cálculo da deformação, que como foi dito na introdução, era um dos objetivos deste trabalho.

De acordo com o exposto na secção 3.2.4, o MSD, considera por simplificação que as características ao longo do elemento são constantes e iguais às características da secção de maior momento positivo, nos casos correntes, ou na secção de encastramento, no caso de consolas. Uma vez que esta simplificação, à exceção no caso de consolas, “ignora ” as zonas de momentos negativos, pretendeu-se com este estudo, analisar também, o mesmo método mas neste caso considerando como determinantes, tanto a secção de momento positivo máximo no vão como as secções de encastramento, no caso de vigas: bi-encastrada e encastrada-apoiada, e de apoio intermédio no caso de vigas de continuidade.

O valor da deformação obtido, de acordo com esta nova formulação do MSD, corresponde à média aritmética simples dos valores obtidos considerando as características do elemento, constantes e iguais, às características de cada uma das secções determinantes. Neste caso, a equação 3.13 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left((1-\zeta_i)\cdot a_{I,i}+\zeta_i\cdot a_{II,i}\right)}{n} \tag{3.24}$$

onde:

ζ_i – coeficiente de distribuição calculado para a secção determinante i;

$a_{I,i}$, $a_{II,i}$ – deformação nos estados I e II, considerando as características da secção determinante i;

n – número de secções determinantes consideradas;

A figura 3.3 indica as secções determinantes, de acordo com esta nova formulação do MSD, em vigas sujeitas a cargas uniformemente distribuída, para diferentes condições de apoio.

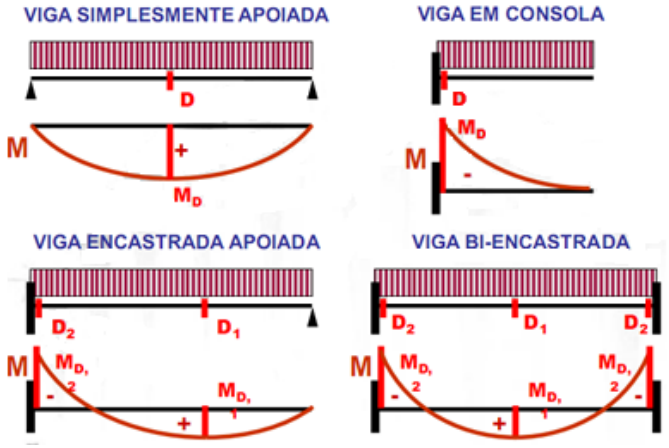


Fig. 3.3 – Secções determinantes segundo nova formulação do MSD [9]

De notar que no caso de vigas simplesmente apoiadas e em consola, esta nova formulação coincide com a formulação inicial do MSD, uma vez que nestes casos só se considera uma única secção determinante, como mostra a figura 3.3.

O estudo foi efetuado considerando vigas em betão armado (materiais: C25/30 e A500), de secção retangular ($0{,}3 \times 0{,}6\ m^2$), sob várias condições de apoio e de carregamento e diferentes níveis de armadura.

Apresenta-se na tabela 3.2 um quadro resumo dos vários casos de análise.

Caso	Tipo de cargas	Condições de Apoio	Vão [m]	$As_{ap,esq}$ [cm^2]	$A's_{ap,esq}$ [cm^2]	$As_{vão}$ [cm^2]	$A's_{vão}$ [cm^2]	$As_{ap,drt}$ [cm^2]	$A's_{ap,drt}$ [cm^2]
A	Uniformemente distribuídas (p_{qp})	Ap – Ap	6,0	15,71	3,39	15,71	3,39	15,71	3,39
B		Enc – Ap	6,0	15,71	6,28	10,30	6,28	10,30	6,28
C		Enc – Enc	6,0	10,05	4,02	6,03	4,02	10,05	4,02
D		Tramo intermédio de viga continua	6,0	6,03	6,03	10,05	4,02	6,03	6,03
E		Consola	2,5	4,52	4,02	4,52	4,02	----	
F	2 cargas concentradas F, de igual valor, aplicadas a 1m e a 3m do apoio esquerdo	Ap - Ap	4,0	8,04	2,26	8,04	2,26	8,04	2,26

Tabela 3.2 – Dados gerais dos casos de estudo: MSD vs MIN

No estudo têm-se em conta as deformações instantâneas e a longo prazo, e ignorou-se o efeito da retração no cálculo da deformação. Quanto ao efeito da fluência, este foi considerado, e admitiu-se o valor do coeficiente de fluência: $\varphi = 2{,}5$.

Apresenta-se em seguida os diagramas, da relação carga – flecha, calculados segundo os métodos: MIN e MSD (uma e várias secções determinantes), para os diferentes casos de estudo, e o respetivo erro relativo entre as duas formulações do MSD e o MIN.

Do estudo apresentado nos gráficos das figuras 3.4 a 3.21 podemos concluir o seguinte:

- O MSD considerando uma única secção determinante aproxima melhor do que o método utilizando várias secções determinantes.
- O MSD aproxima melhor quando se estuda a deformação a longo prazo em comparação com o estudo da deformação instantânea.
- Para valores de carga imediatamente superiores aos de fendilhação (fase de formação de fendas) ocorre um pico no erro relativo, após esse pico o erro tende a diminuir.
- No caso da consola (caso E) o erro relativo é considerável, atingindo a certa altura um erro superior a 100%.

Caso A

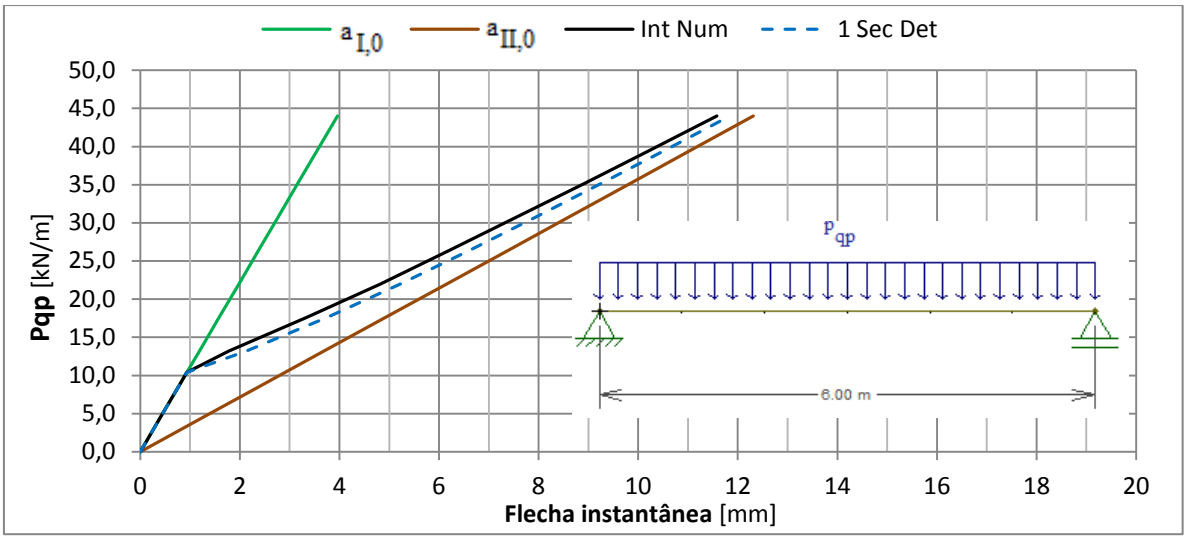


Fig. 3.4 – Diagrama carga – flecha instantânea (Caso A)

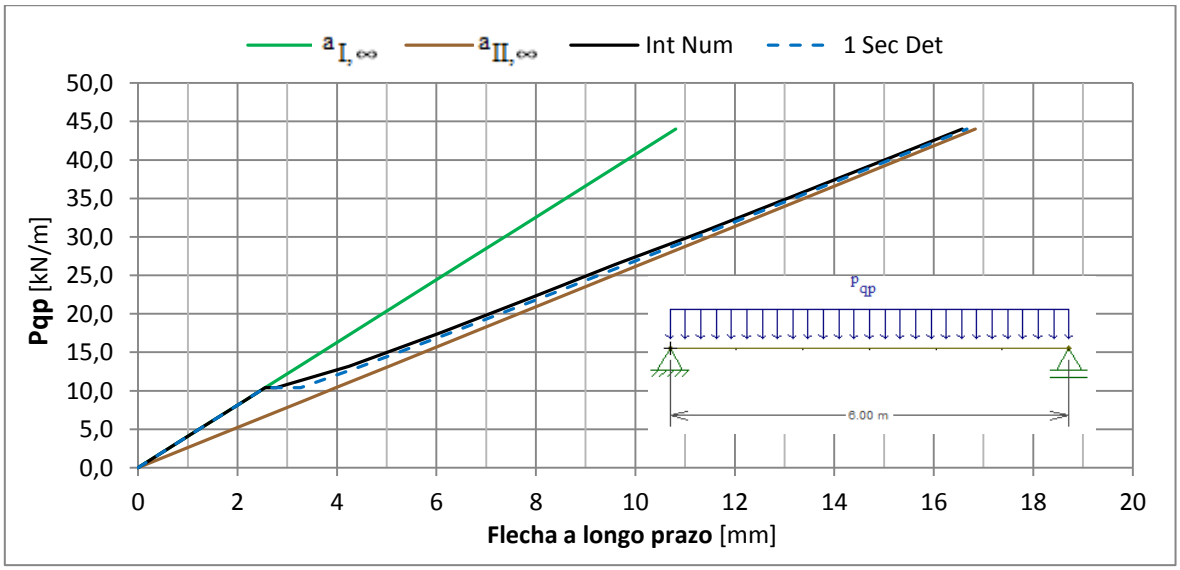


Fig. 3.5 – Diagrama carga – flecha a longo prazo (Caso A)

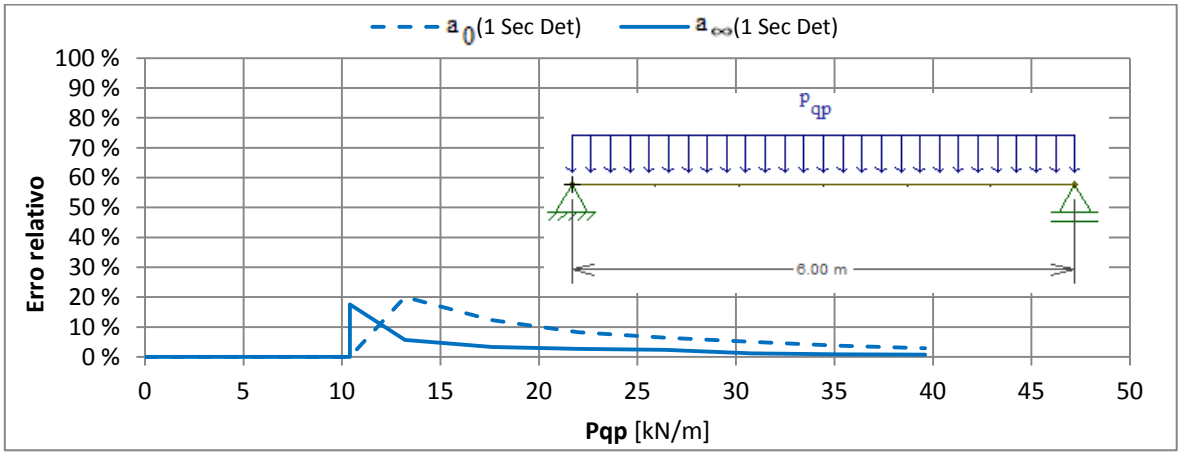


Fig. 3.6 – Comparação de resultados: MSD vs MIN (Caso A)

Caso B

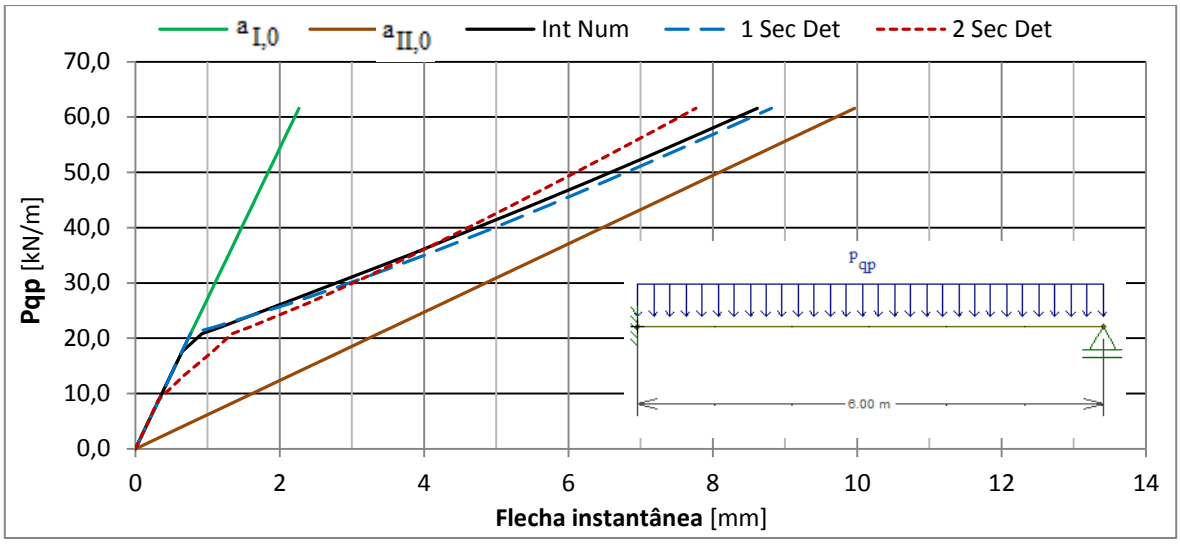


Fig. 3.7 – Diagrama carga – flecha instantânea (Caso B)

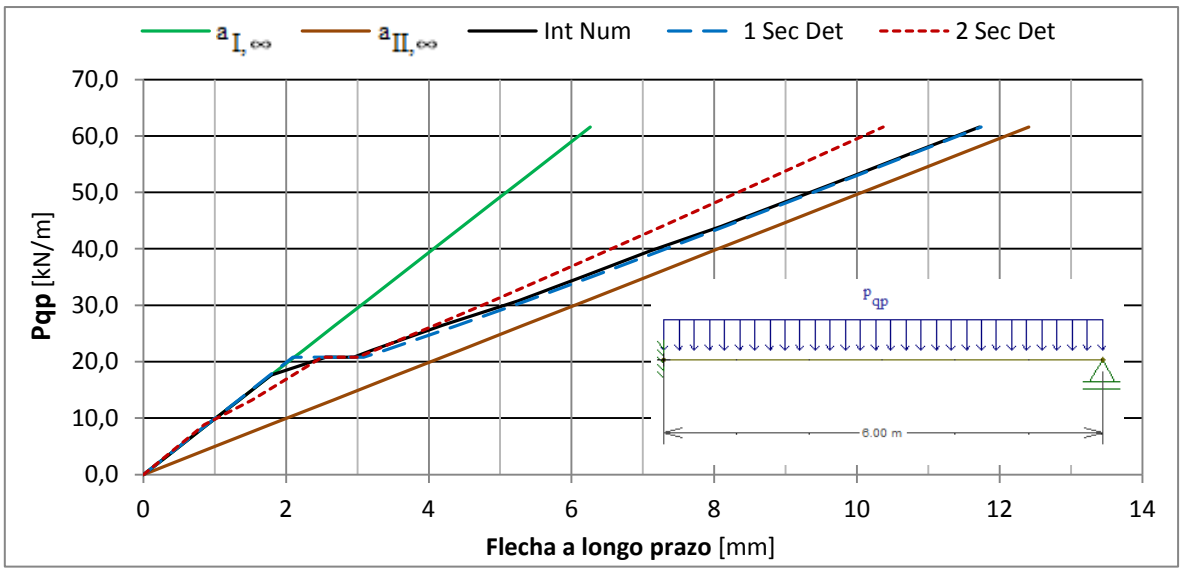


Fig. 3.8 – Diagrama carga – flecha a longo prazo (Caso B)

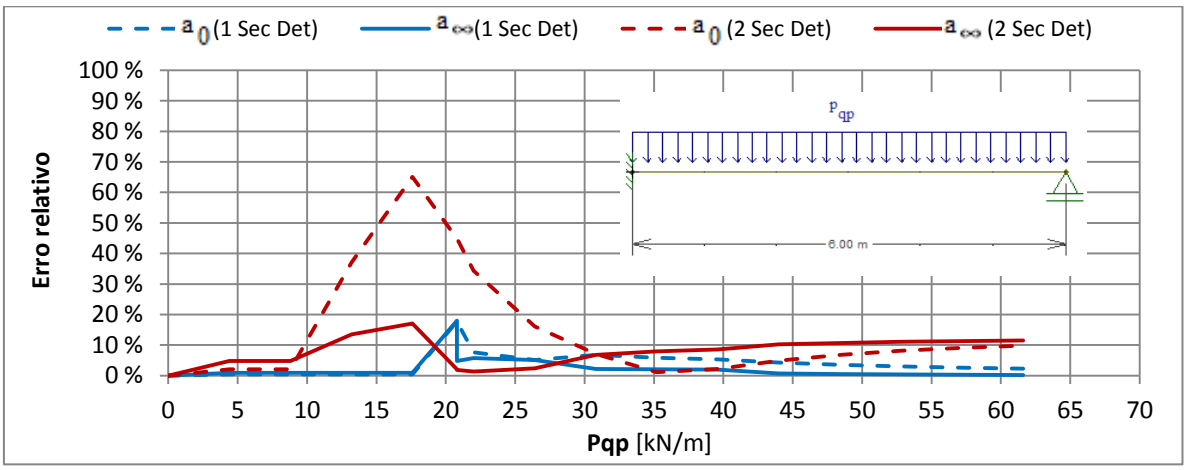


Fig. 3.9 – Comparação de resultados: MSD vs MIN (Caso B)

Caso C

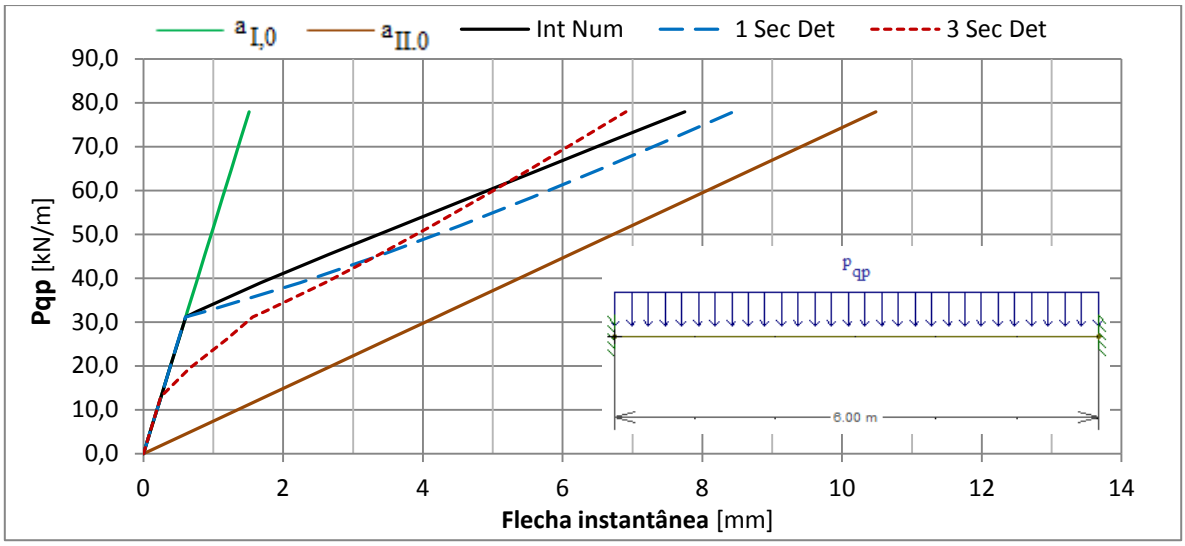


Fig. 3.10 – Diagrama carga – flecha instantânea (Caso C)

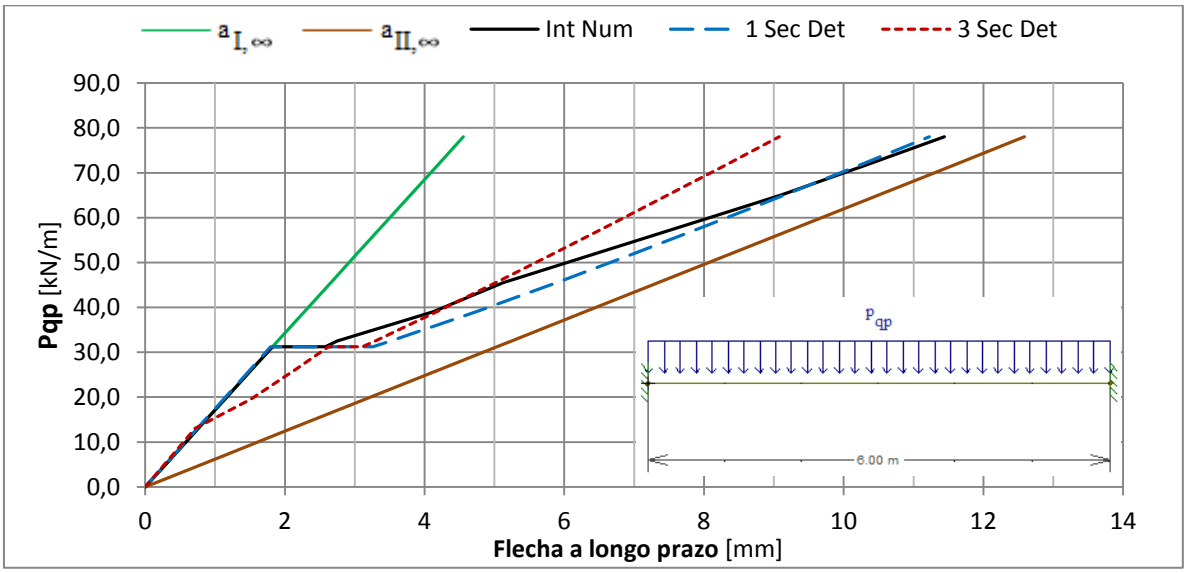


Fig. 3.11 – Diagrama carga – flecha a longo prazo (Caso C)

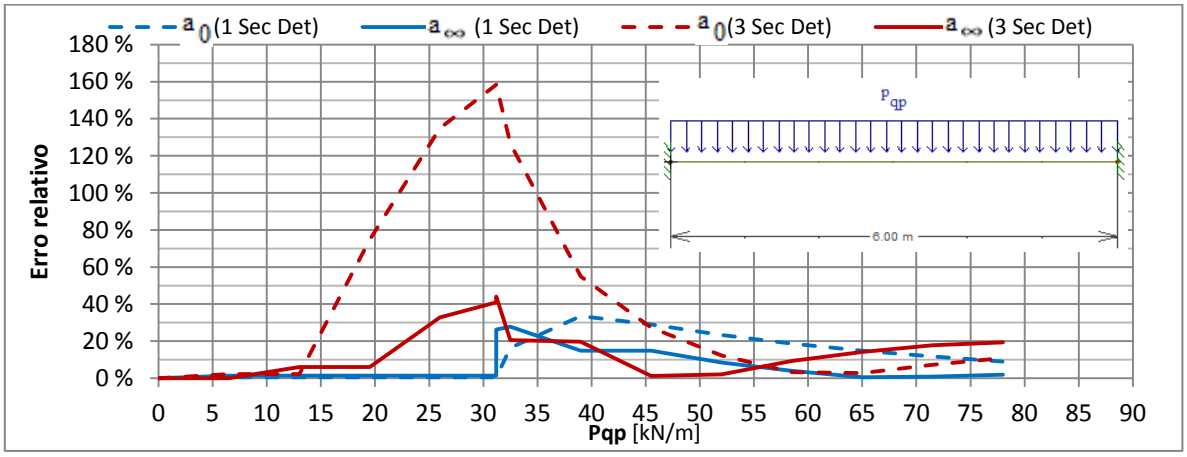


Fig. 3.12 – Comparação de resultados: MSD vs MIN (Caso C)

Caso D

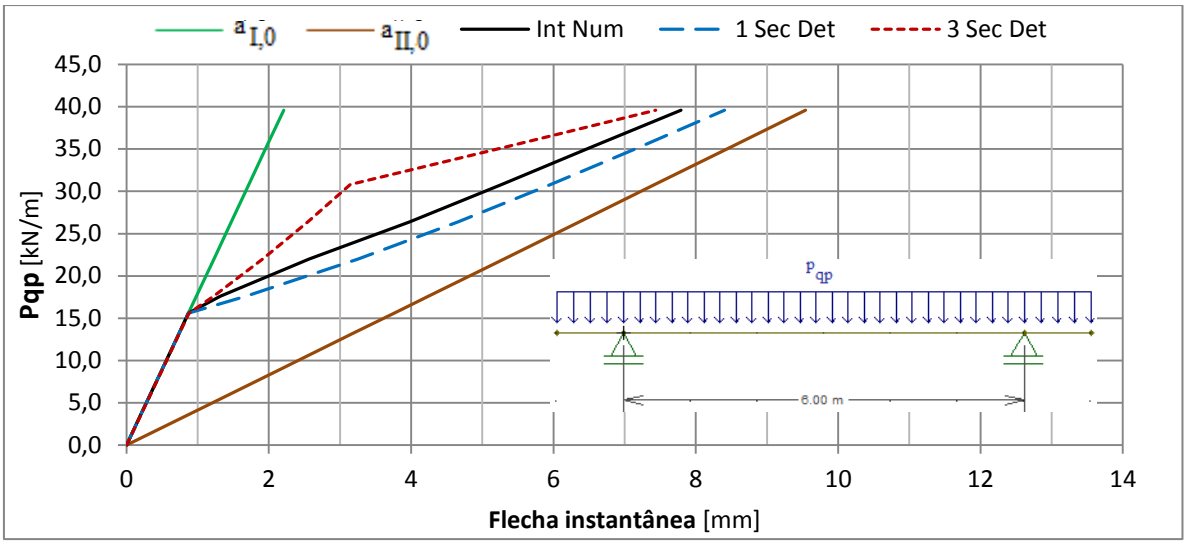


Fig. 3.13 – Diagrama carga – flecha instantânea (Caso D)

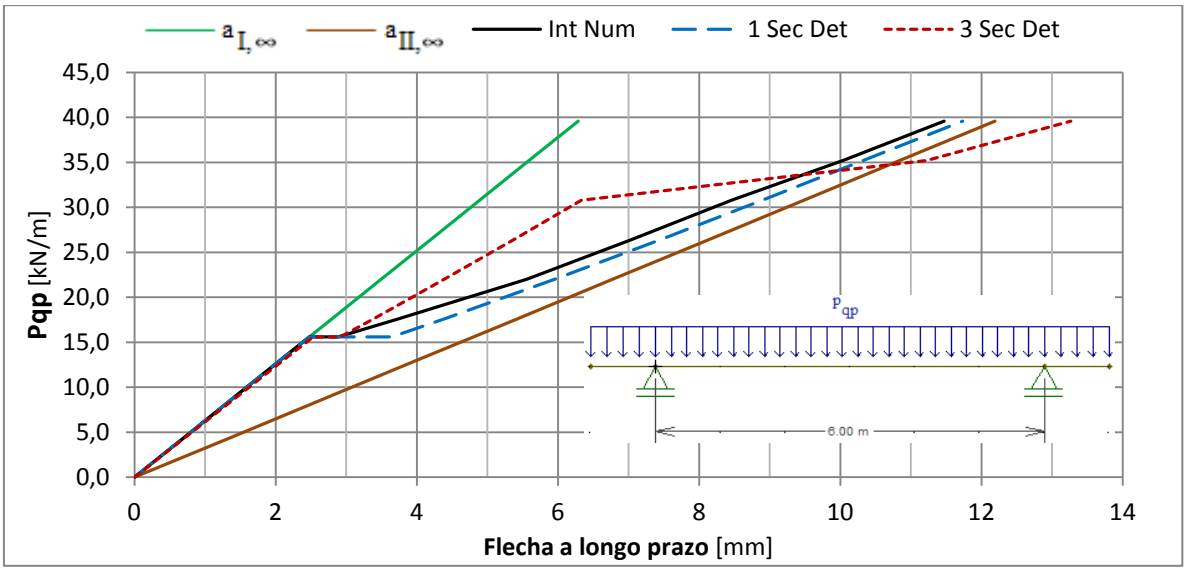


Fig. 3.14 – Diagrama carga – flecha a longo prazo (Caso D)

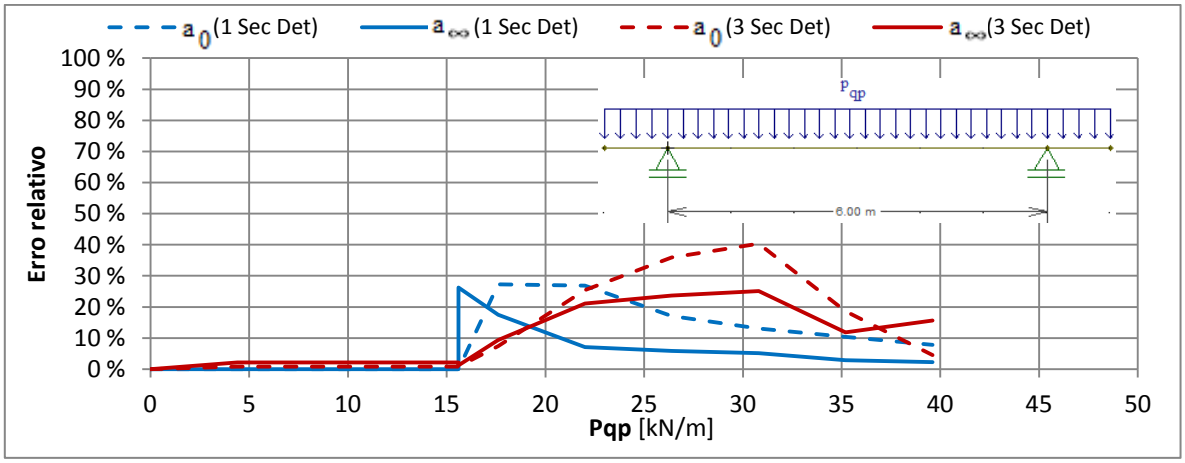


Fig. 3.15 – Comparação de resultados: MSD vs MIN (Caso D)

Caso E

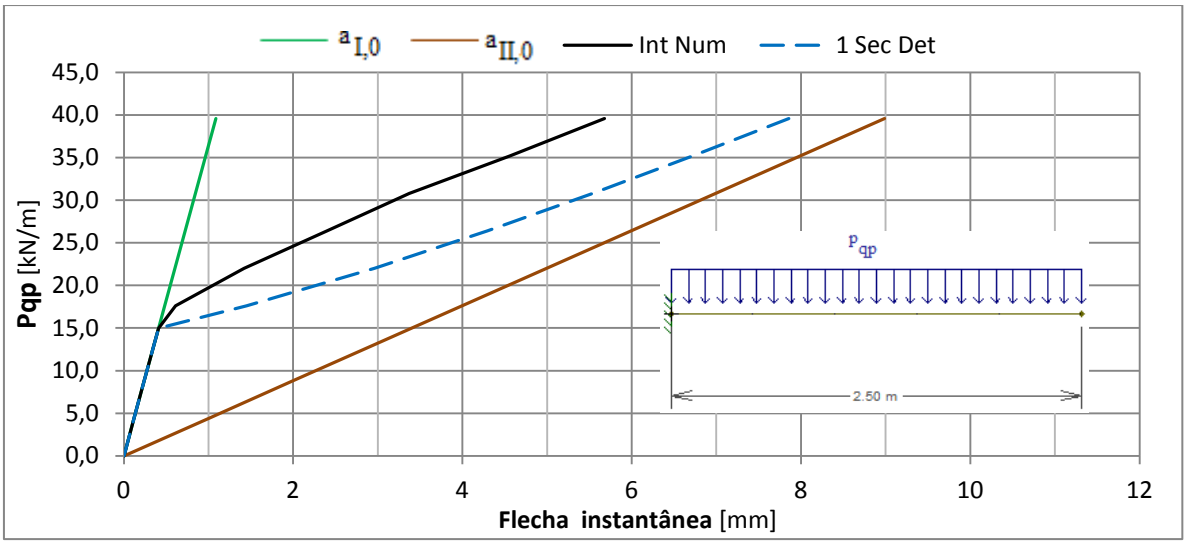


Fig. 3.16 – Diagrama carga – flecha instantânea (Caso E)

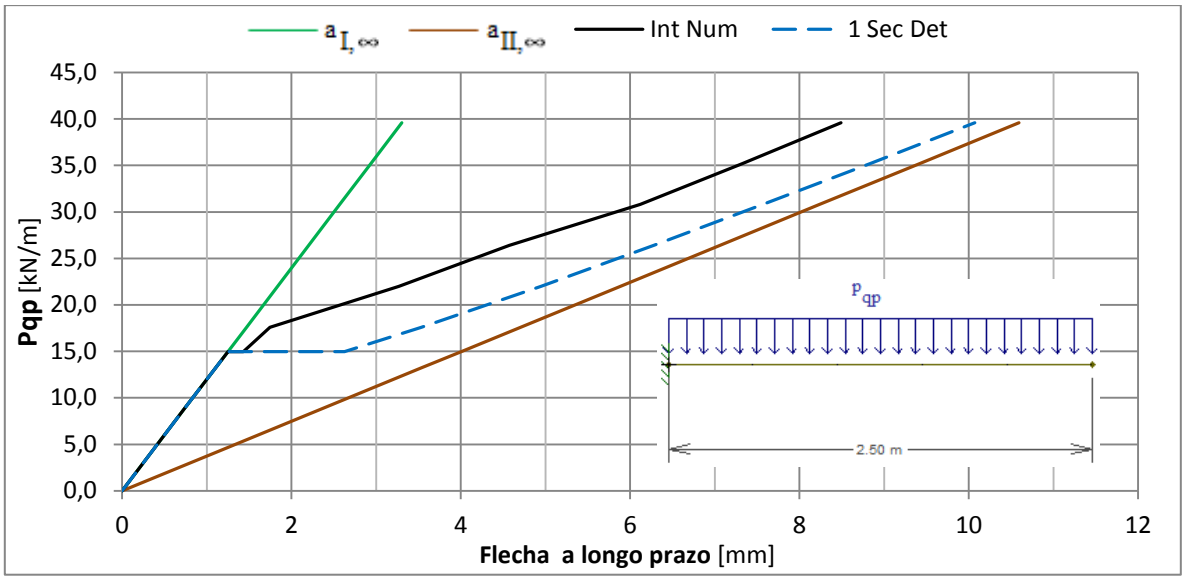


Fig. 3.17 – Diagrama carga – flecha a longo prazo (Caso E)

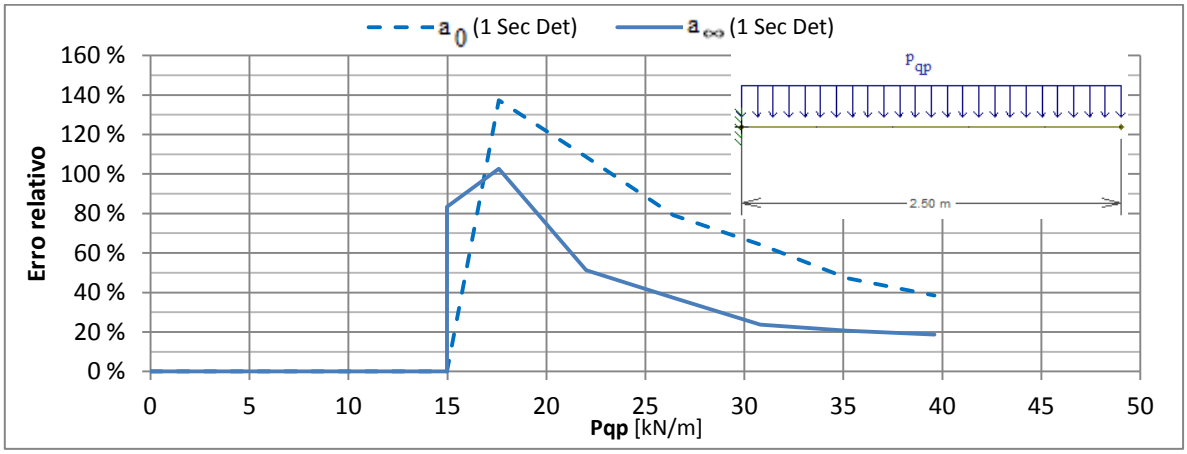


Fig. 3.18 – Comparação de resultados: MSD vs MIN (Caso E)

Caso F

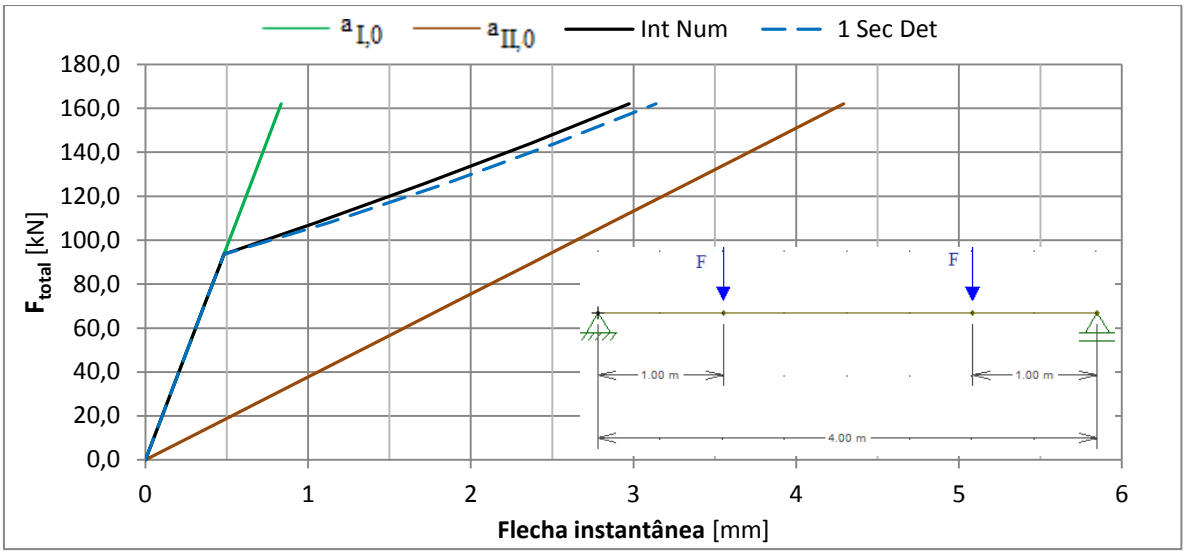


Fig. 3.19 – Diagrama carga – flecha instantânea (Caso F)

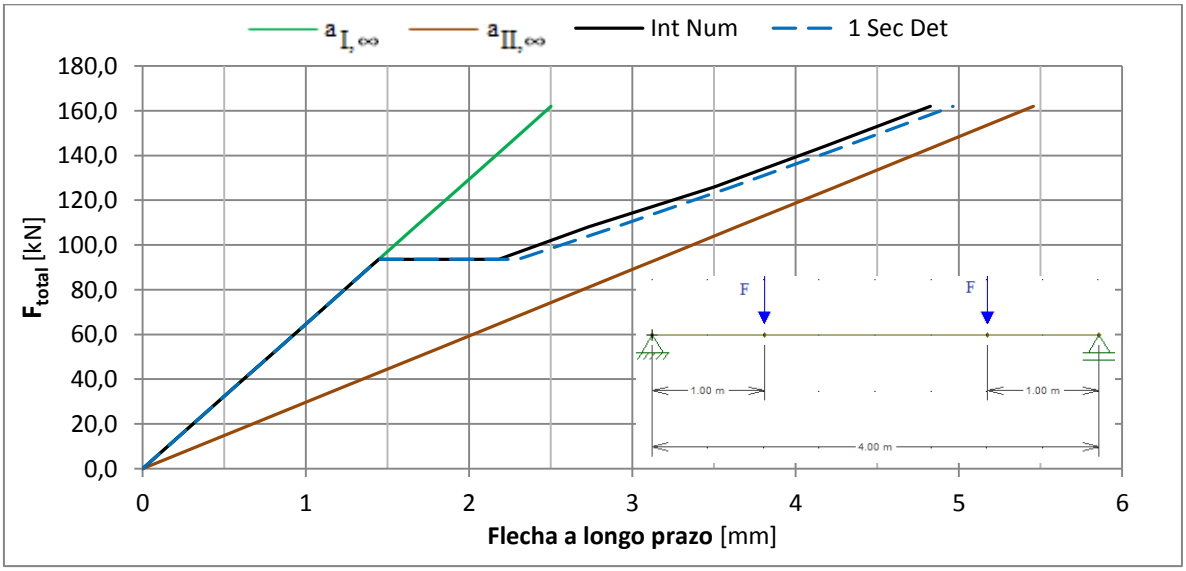


Fig. 3.20 – Diagrama carga – flecha a longo prazo (Caso F)

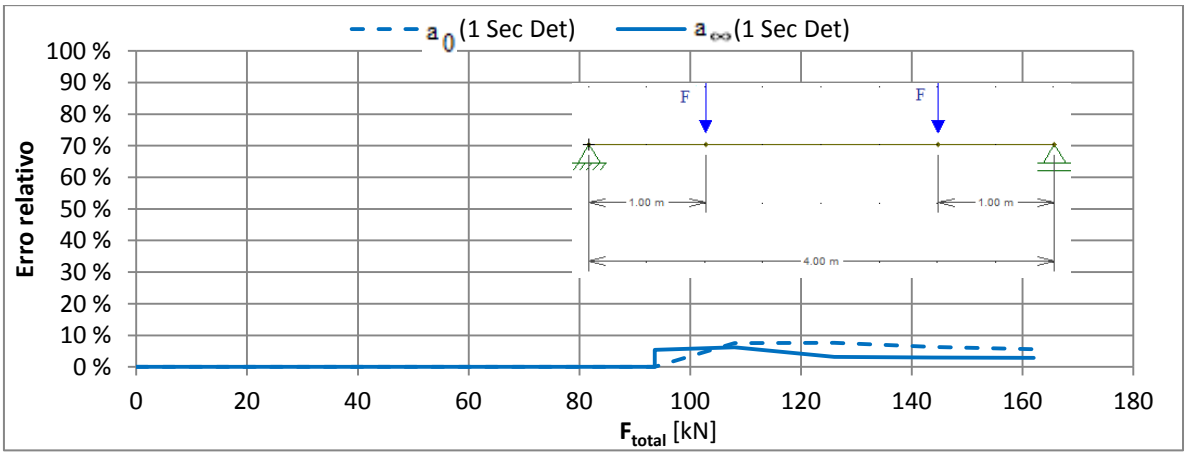


Fig. 3.21 – Comparação de resultados: MSD vs MIN (Caso F)

3.4. Comparação com resultados experimentais

Neste capítulo é feito um estudo comparativo entre os valores experimentais obtidos em laboratório e os valores obtidos pelo método de integração numérica (MIN) anteriormente enunciado.

Os ensaios experimentais foram realizados no laboratório de estruturas do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Nova de Lisboa (DEC/UNL), no âmbito da dissertação de mestrado para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil de Tiago Silva de Carvalho [13] e da dissertação de doutoramento para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil de Hugo Biscaia [14].

Os resultados experimentais a seguir expostos referem-se a ensaios monotónicos, de duas vigas em betão armado de secção em T, denominadas, viga TSC1 [13] e viga HB1 [14], cuja geometria e a pormenorização das armaduras se apresentam na figura 3.22.

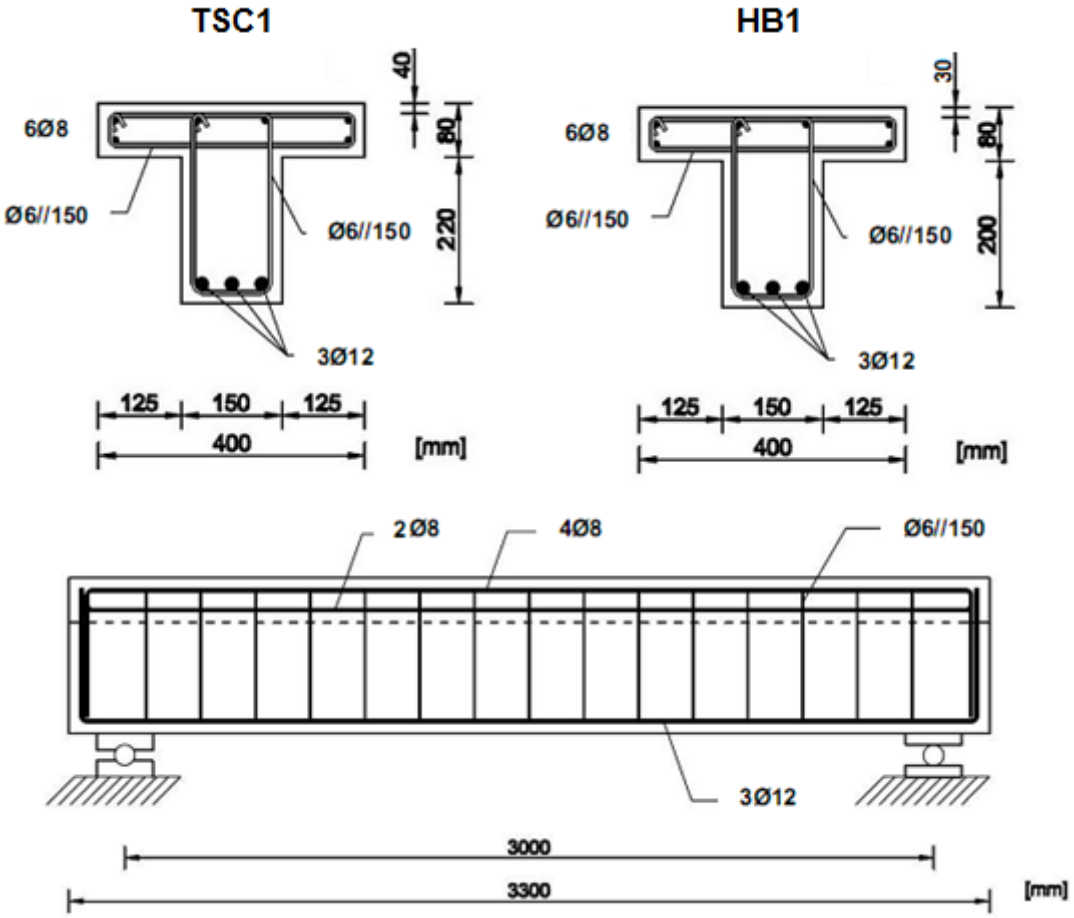


Fig. 3.22 – Pormenorização das vigas tipo TSC1 e HB1 (retirado de [15])

Segue uma breve descrição dos ensaios, retirado de [13]:

"… Sistema em que a carga é transmitida aos modelos em quatro pontos, de forma simétrica em relação ao eixo dos mesmos… Em termos gerais, o sistema de ensaio era constituído por dois blocos de betão onde, através da utilização de aparelhos de apoio concebidos especificamente para o ensaio, a viga era apoiada. Por sua vez, a aplicação da carga foi garantida através da utilização de dois cilindros hidráulicos Enerpac RRH-307, apoiados simetricamente em duas vigas dispostas perpendicularmente.".

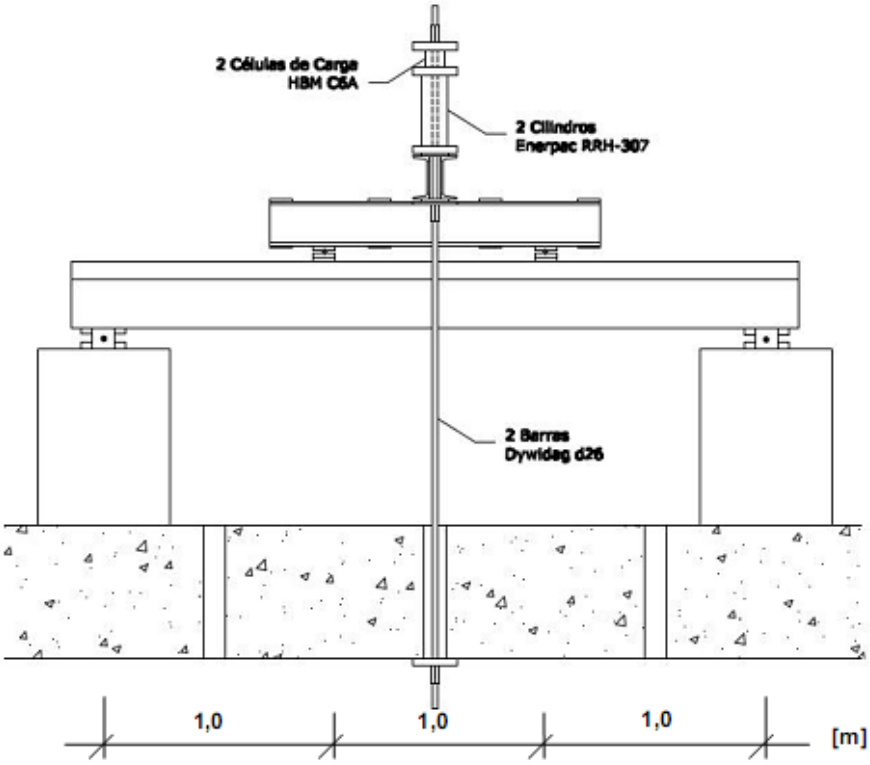


Fig. 3.23 – Alçado longitudinal do sistema de ensaio (retirado de [13])

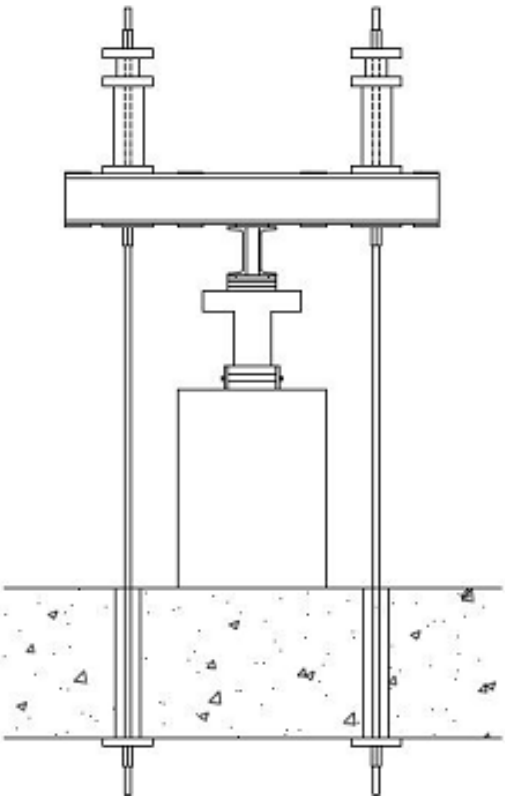


Fig. 3.24 – Corte transversal do sistema de ensaio (retirado de [13])

Antes de se apresentar os resultados do estudo indica-se na tabela 3.3 uma síntese das características dos materiais. Os valores das características do betão foram obtidos através de ensaios de caracterização realizados por Tiago Carvalho [13] e Hugo Biscaia [14].

	Betão		**Aço**	
	f_{ctm} [MPa]	E_{cm} [GPa]	**Classe**	E_s [GPa]
TSC1	1,84	23.80	A 500	200
HB1	1,65	23,18	A 400	200

Tabela 3.3 – Síntese das características dos materiais

Apresentam-se em seguida os valores das flechas registados nos ensaios laboratoriais e aqueles obtidos pelo método de integração numérica, calculados de acordo com exposto no capítulo 3.1. Os valores apresentados foram medidos na secção de meio vão. No cálculo das flechas pelo método de integração numérica desprezou-se o efeito da retração.

TSC1					**HB1**				
F [kN]	**a_{TSC1}**	**a_{MIN}**	**Erro relativo**	**Erro absoluto**	**F [kN]**	**a_{HB1}**	**a_{MIN}**	**Erro relativo**	**Erro absoluto**
0	0,00	0,00	0 %	0,00	0	0,00	0,00	0 %	0,00
4,16	0,26	0,15	– 42 %	– 0,11	2,06	0,11	0,09	– 18 %	– 0,02
5	0.26	0,28	7 %	0,02	3	0,17	0,25	46 %	0,08
6	0.28	9,48	71 %	0,20	5	0,45	0,73	60 %	0,27
8	0.63	0,92	46 %	0,29	8	1,43	1,38	– 3 %	– 0,04
10	1.02	1,32	30 %	0,30	10	1,89	1,81	– 4 %	– 0,08
15	1.92	2,31	21 %	0,39	15	2,94	2,81	– 5 %	– 0,13
20	3,29	3,22	– 2 %	– 0,07	20	4,02	3,75	– 7 %	– 0,28
25	4,31	4,09	– 5 %	– 0,21	25	5,06	4,70	– 7 %	– 0,35
30	5,45	4,96	– 9 %	– 0,49	30	6,09	5,63	– 8 %	– 0,46
35	6,32	5,82	– 8 %	– 0,49	35	7,10	6,55	– 8 %	– 0,55
40	7,34	6,67	– 9 %	– 0,66	40	8,17	7,46	– 9 %	– 0,71
45	8,51	7,52	– 12 %	– 0,99	45	9,14	8,36	– 9 %	– 0,79
50	9,59	8,35	– 13 %	– 1,24	50	10,23	9,25	– 10%	– 0,98
55	10,45	9,17	– 12 %	– 1,27	55	11,26	10,14	– 10%	– 1,12
60	11,44	10,00	– 13 %	– 1,44	60	12,54	11,03	– 12 %	– 1,50
65	12,46	10,82	– 13 %	– 1,64	62,9	13,35	11,55	– 14 %	– 1,81
70	13,50	11,63	– 14 %	– 1,87					
75	14,53	12,44	– 14 %	– 2,08					
80	15,68	13,26	– 15 %	– 2,43					
85.5	16,79	14,15	– 16 %	– 2,64					

Tabela 3.4 –Valores das flechas a meio vão e respetivos erros

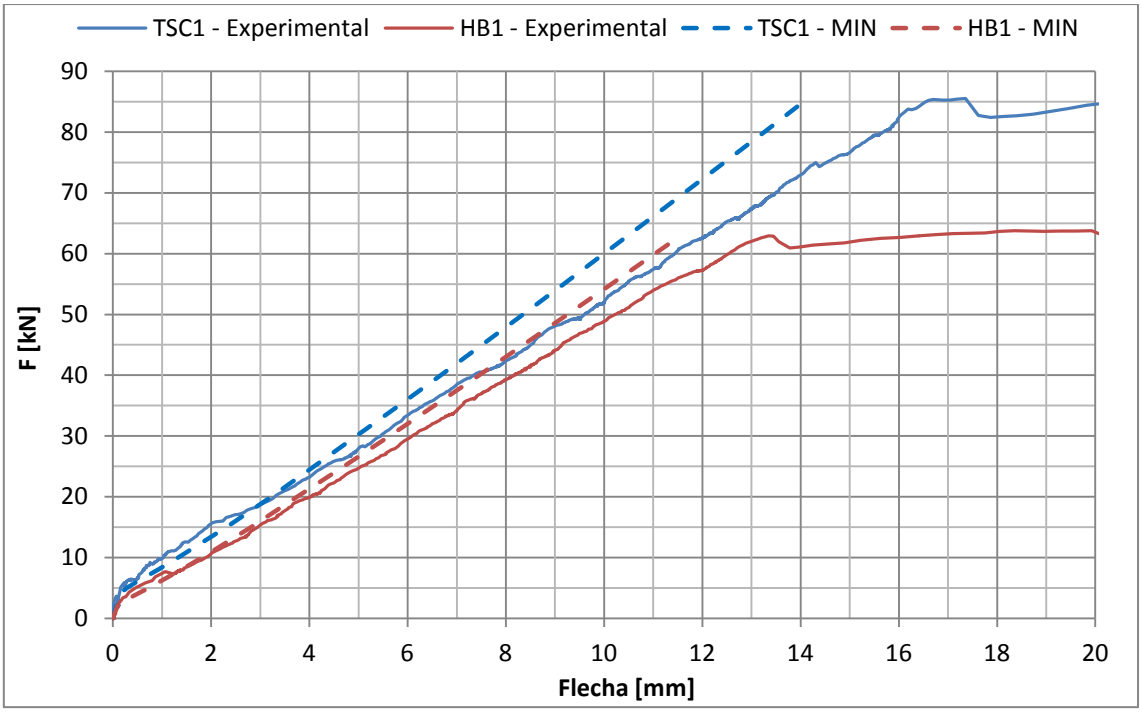


Fig. 3.25 – Gráfico Força – Flecha (resultados experimentais vs MIN)

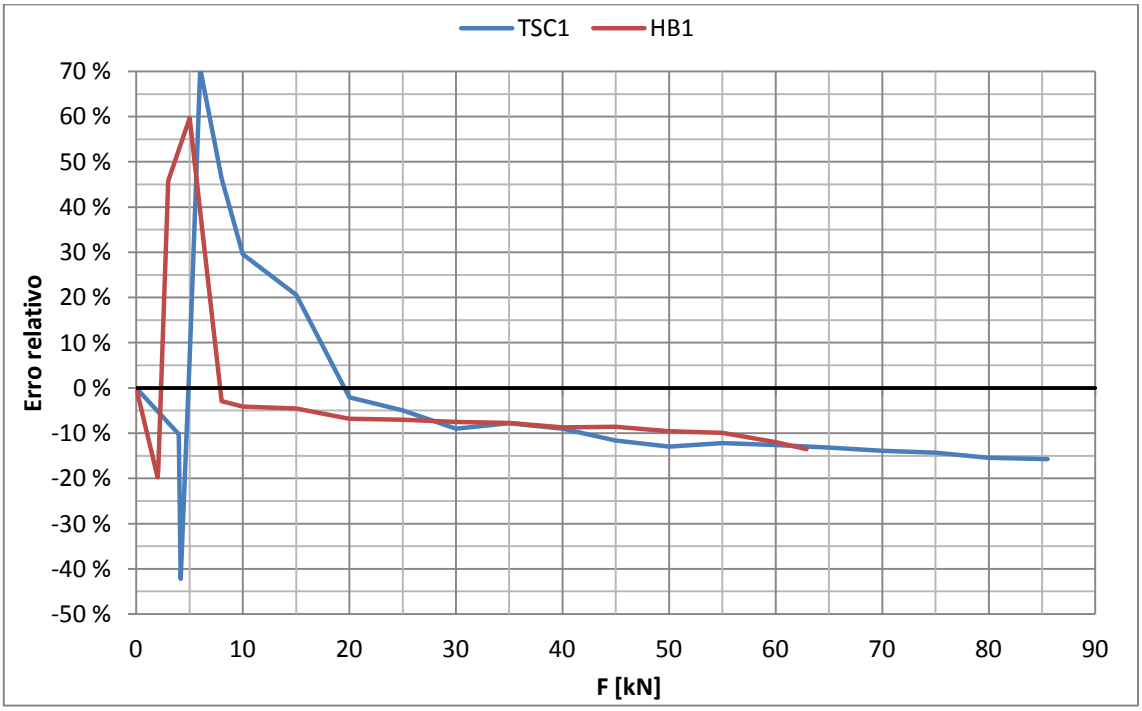


Fig. 3.26 – Erro relativo entre o MIN e os resultados experimentais

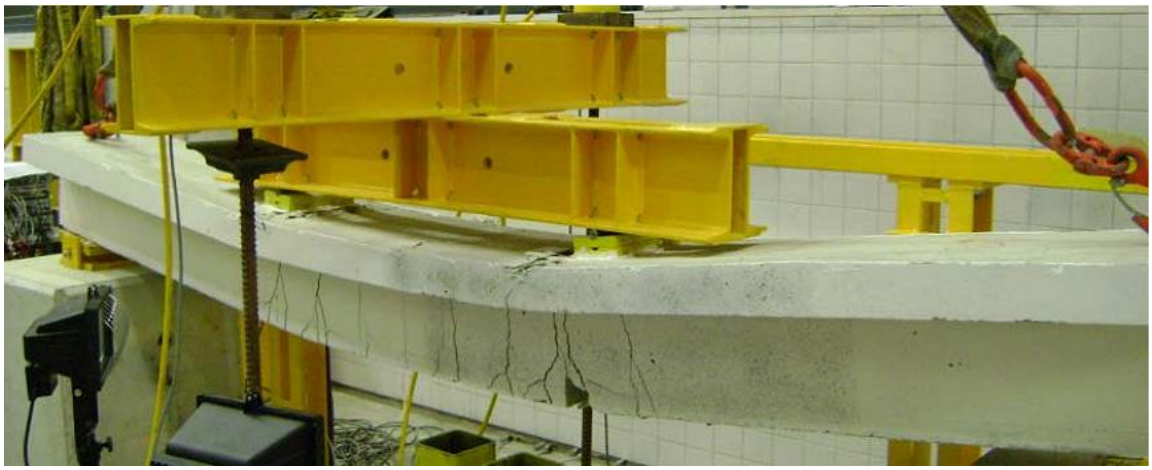


Fig. 3.27 – Aspecto global da viga TSC1 após ensaio (retirado de [13])

Os valores das flechas obtidos pelo MIN foram calculados recorrendo a um programa em Excel, desenvolvido pelo autor deste trabalho. Nos cálculos tiveram-se em conta o peso próprio das vigas assim como o peso dos equipamentos de ensaio, os quais provocam deformação nas vigas antes da aplicação da carga F. Mas essa deformação não é contabilizada nos gráficos anteriormente expostos, uma vez que o objetivo era medir a flecha provocada somente pela carga aplicada F. Para tal admitiu-se, nos cálculos, que antes da aplicação da carga F, as vigas já tinham sofrido toda a deformação provocada pelo seu peso próprio e pelo peso dos equipamentos de ensaio.

Nos gráficos anteriormente expostos a carga F, refere-se ao valor da carga total aplicada às vigas. Que corresponde à soma de duas força de valor F/2 aplicadas a 1m e a 2m do apoio esquerdo, como indicam as figuras 3.23 e 3.24.

Da análise dos resultados expostos nas figuras 3.25 e 3.26 observa-se que existe uma ligeira diferença entre os valores registados nos ensaios laboratoriais e aqueles calculados pelo método de integração numérica.

Essa diferença poderá dever-se a vários fatores entre eles o facto de admitirmos nos cálculos pelo método de integração numérica que as vigas são geometricamente perfeitas e que os recobrimentos das armaduras são constantes ao longo das vigas, o que não corresponde à realidade, pois como o autor deste trabalho pôde observar, a geometria das vigas variava ligeiramente ao longo das mesmas e o recobrimento não era exatamente o mesmo em todos os pontos da extensão das vigas. E uma vez que a altura das vigas é relativamente pequeno, uma pequena diferença na altura útil das armaduras pode implicar uma alteração na rigidez das vigas e consequentemente uma diferença significativa nos valores das flechas.

Outros fatores relevantes e justificativos desta diferença de resultados podem dever-se a erros inerentes aos ensaios laboratoriais e ao fato de se ter verificado fendas por retração antes do início dos ensaios [13] [14].

Da análise da figura 3.26 constata-se que para valores de carga mais baixos o erro relativo é grande sendo por vezes superior a 50 %, no entanto em termos absolutos o erro é pequeno, inferior a 0,4 mm.

Para valores de carga superiores o MIN minora os valores obtidos em laboratório e o erro relativo nestes casos é inferior a 15%.

O valor teórico obtido pelo MIN, da carga aplicada que provoca a fendilhação ($F_{cr,teórica}$) é aproximadamente 4,2 kN e 2,1 kN no caso das vigas TSC1 e HB1, respetivamente. Pela análise da figura 3.25, constata-se que o valor real da carga que provoca a fendilhação é próximo do valor teórico.

3.5. Programa de cálculo por integração numérica – NovaDef

Apresenta-se nesta secção, uma breve descrição do programa de cálculo NovaDef, desenvolvido pelo autor, que serviu de base para a obtenção dos resultados pelo método de integração numérica. O programa foi desenvolvido através da programação de macros em Visual Basic for Applications (VBA) do Excel, e apoia-se em folhas de Excel que foram calculadas tendo em conta as variáveis do problema, considerando no cálculo da deformação os efeitos da fluência e da fendilhação. Para efeitos da integração numérica "dividiu-se" o elemento em onze secções e calcularam-se as respetivas características (momentos de inércia, módulo de elasticidade efetivo, curvatura, etc…) sendo que a flecha é obtida através da aplicação do Método de Simpson, o qual foi enunciado na secção 3.1.

Nota para o facto de o programa ter sido desenvolvido apenas para situações em que a carga é uniformemente distribuída e de se ter desprezado a contribuição da retração. Nos casos em que a carga é concentrada, o autor deste trabalho, desenvolveu igualmente folhas de Excel que calculam a deformação nestes casos, folhas essas que serviram de apoio para o cálculo dos valores da deformação que foram utilizados na secção anterior, mas não introduziu este cenário no programa que desenvolveu. Da mesma forma, o autor também desenvolveu folhas de Excel para o cálculo da deformação devido à retração, embora no programa que aqui é apresentado a influência da retração tenha sido desprezada.

Apresenta-se em seguida uma breve descrição do funcionamento do programa.

O programa consiste num formulário em que é pedido ao utilizador o preenchimento dos campos destinados às condições do problema, são elas: condições de apoio, tipo de secção e sua geometria, classe dos materiais (betão e aço), valor da carga, comprimento do vão, posição da secção a estudar, coeficiente de fluência, valor absoluto dos momentos nas secções de apoio e quantidades de armaduras superior e inferior nos apoios e no vão. Quando preenchidos todos os campos, clicando no botão "Calcular", o programa devolve uma caixa de mensagem (Fig. 3.34) com os valores das flechas: elástica, instantânea e a longo prazo e informa, se nas condições do problema, está verificada a segurança em relação ao limite L/250 (§ 2.1).

Após este passo aparece uma caixa de mensagem (Fig. 3.35) que pergunta ao utilizador se pretende obter, num ficheiro pdf, os resultados detalhados do estudo, em forma de tabelas e gráficos. Em caso afirmativo o programa devolve o ficheiro pdf com os dados do problema e os resultados do estudo, após o que o programa apresenta uma mensagem de alerta (Fig. 3.36) em que aconselha o utilizador a alterar o nome do ficheiro, de forma a evitar que haja uma substituição desse ficheiro caso o utilizador volte a usar o programa. Após a descarga do ficheiro pdf será perguntado ao utilizador se pretende voltar ou sair do programa (Fig. 3.37).

Caso o utilizador decida não querer a informação detalhada, o programa volta à janela anterior, com os campos preenchidos com os dados anteriormente introduzidos pelo utilizador (Fig. 3.33).

O botão "Limpar" apaga o conteúdo de todos os campos e volta à apresentação inicial do programa.

Para sair do programa basta, em qualquer momento, clicar no botão "Cancelar".

Demonstração:

Em seguida faz-se uma demonstração do uso do programa, enumerando os passos a seguir pelo utilizador:

Para que o programa arranque é necessário que o Excel esteja habilitado para ler macros. Para tal, o utilizador ao abrir o ficheiro do programa tem de autorizar a leitura de macros. Após isso, o programa arranca automaticamente, aparecendo uma janela como a da figura 3.28.

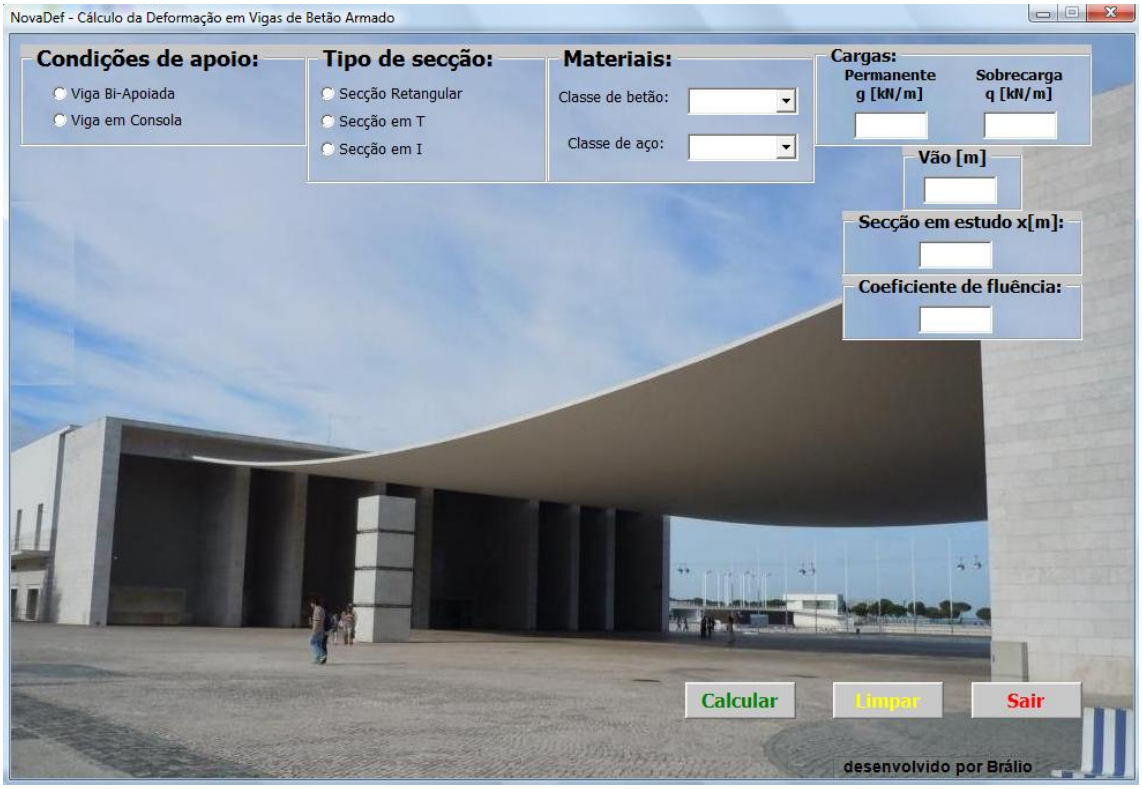


Fig. 3.28 – Apresentação inicial do programa

Passo 1: Escolher as condições de apoio;

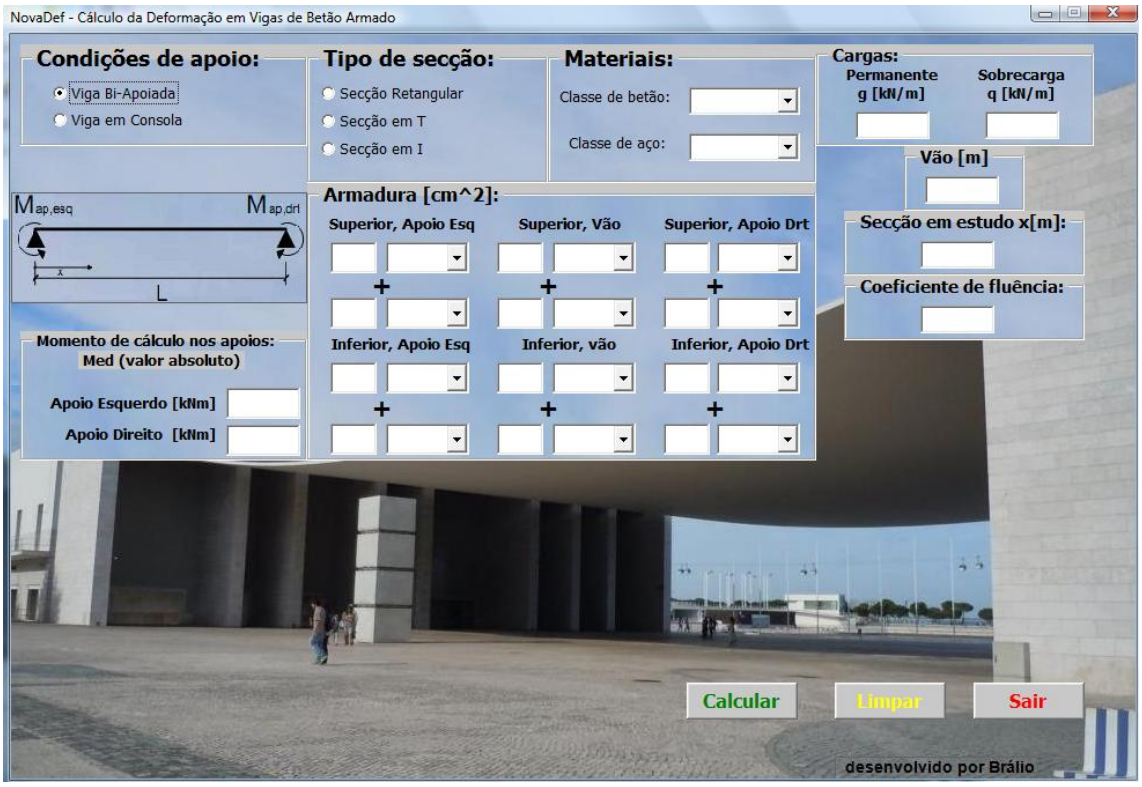


Fig. 3.29 – *Layout* após seleção das condições de apoio (demonstração)

Passo 2: Escolher o tipo de secção;

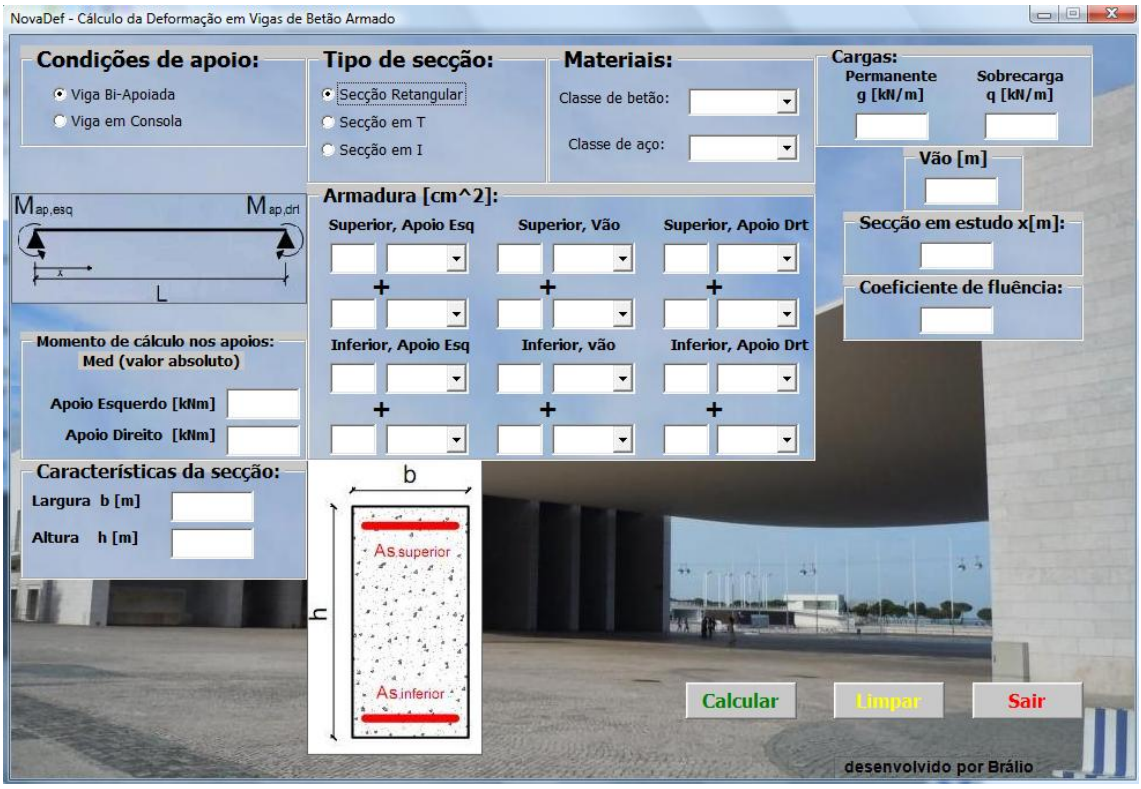


Fig. 3.30 – *Layout* após seleção do tipo de secção (demonstração)

Passo 3: Escolher a classe dos materiais (betão e aço);

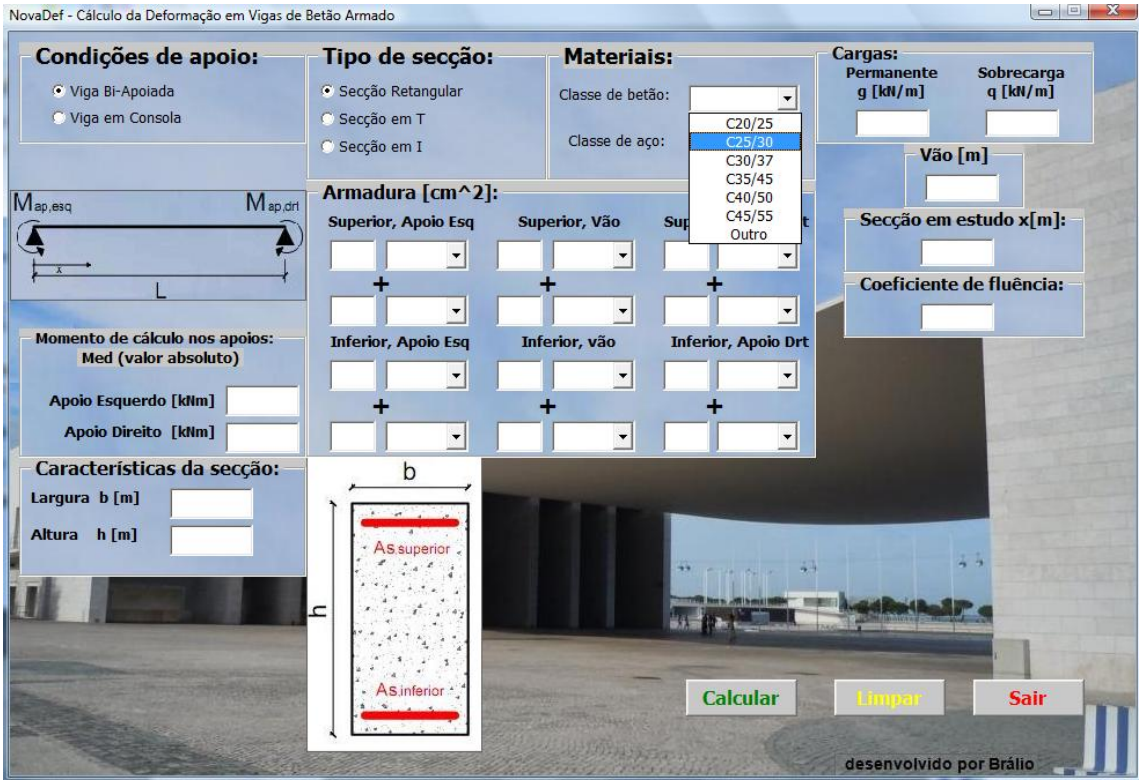


Fig. 3.31 – Seleção da classe de betão (demonstração)

Passo 4: Indicar valor característico das cargas permanentes e sobrecarga, em kN/m;

Passo 5: Indicar o comprimento do vão, em metros;

Passo 6: Indicar a posição da secção onde se quer calcular a flecha, medida em relação ao apoio esquerdo, em metros;

Passo 7: Indicar o valor do coeficiente de fluência;

Passo 8: Indicar o valor absoluto dos momentos de cálculo nos apoios. No caso de vigas em consola o programa admite automaticamente o valor do momento no apoio, não sendo necessário que o utilizador introduza o valor;

Passo 9: Introduzir a quantidade de armaduras, superior e inferior, presentes nas secções dos apoios e do vão. Note-se que o programa aceita até dois tipos de varões diferentes, para a armadura de tração ou de compressão, presente na secção. Exemplo: $2\emptyset16 + 1\emptyset12$.

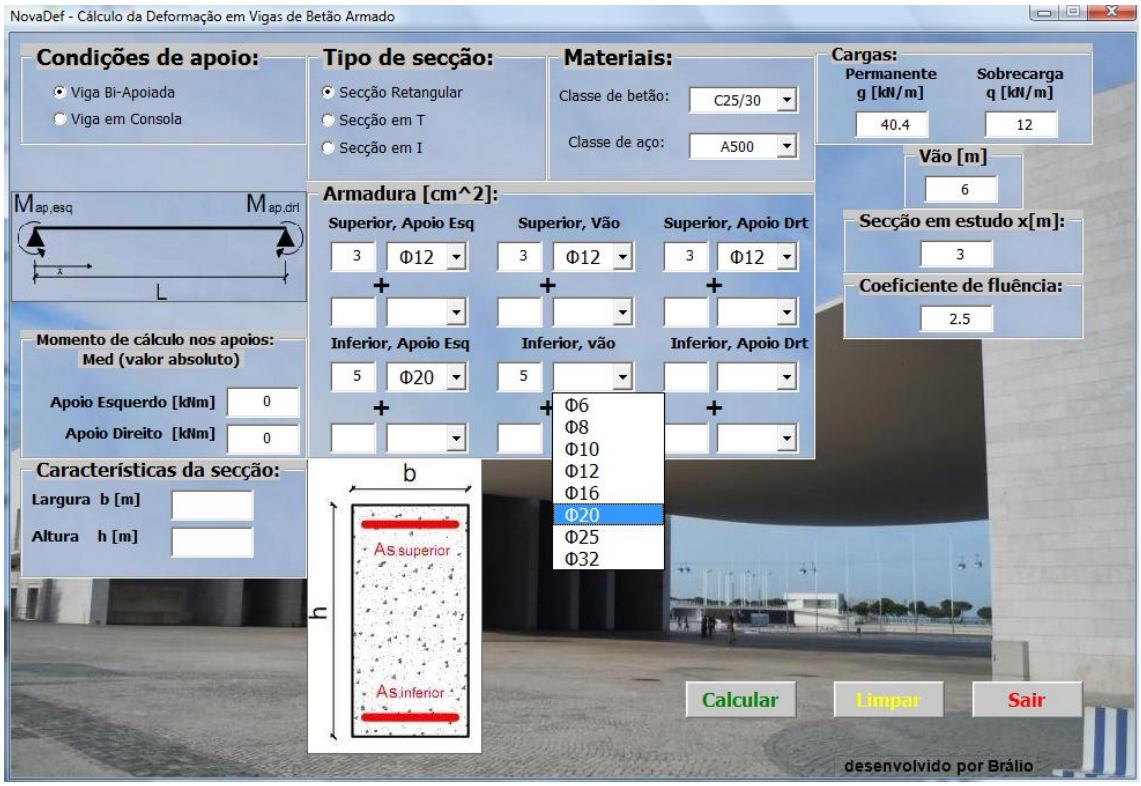


Fig. 3.32 – Seleção da quantidade de armaduras (demonstração)

Passo 10: Introduzir as dimensões da secção transversal da viga, em metros;

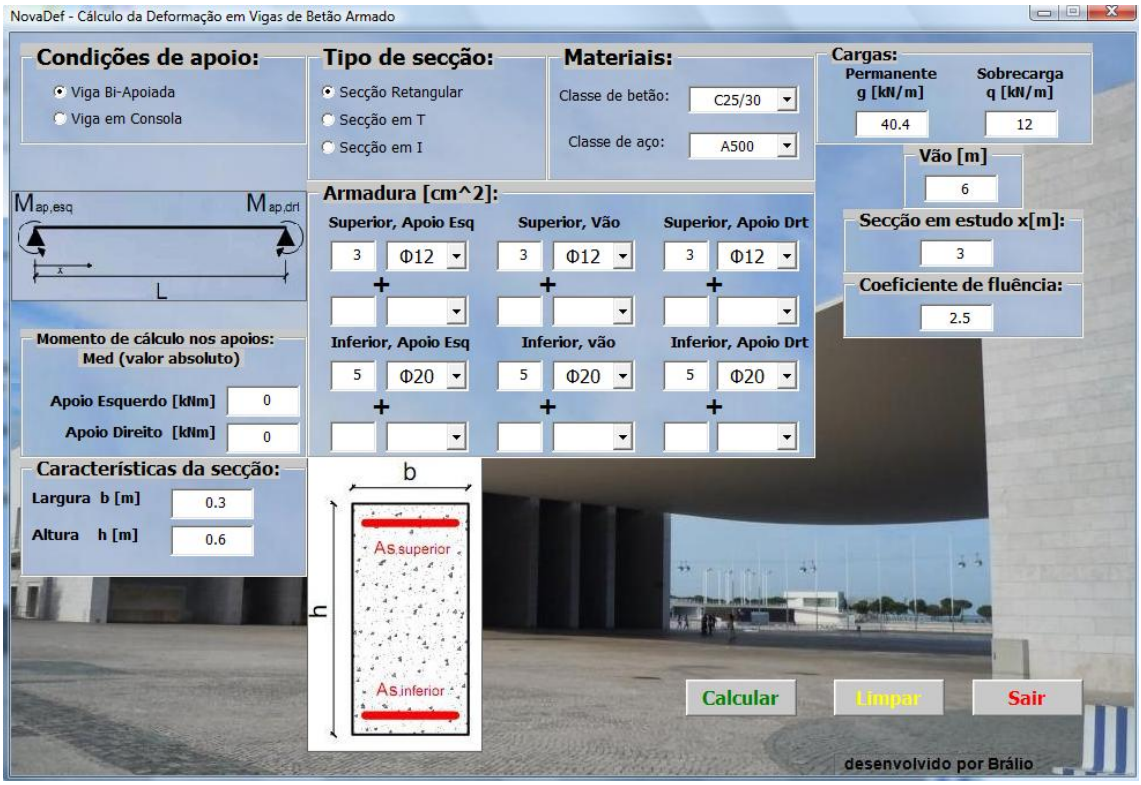


Fig. 3.33 – *Layout* após todos os campos preenchidos (demonstração)

Passo 11: Clicar no botão calcular, para obter os valores da deformação;

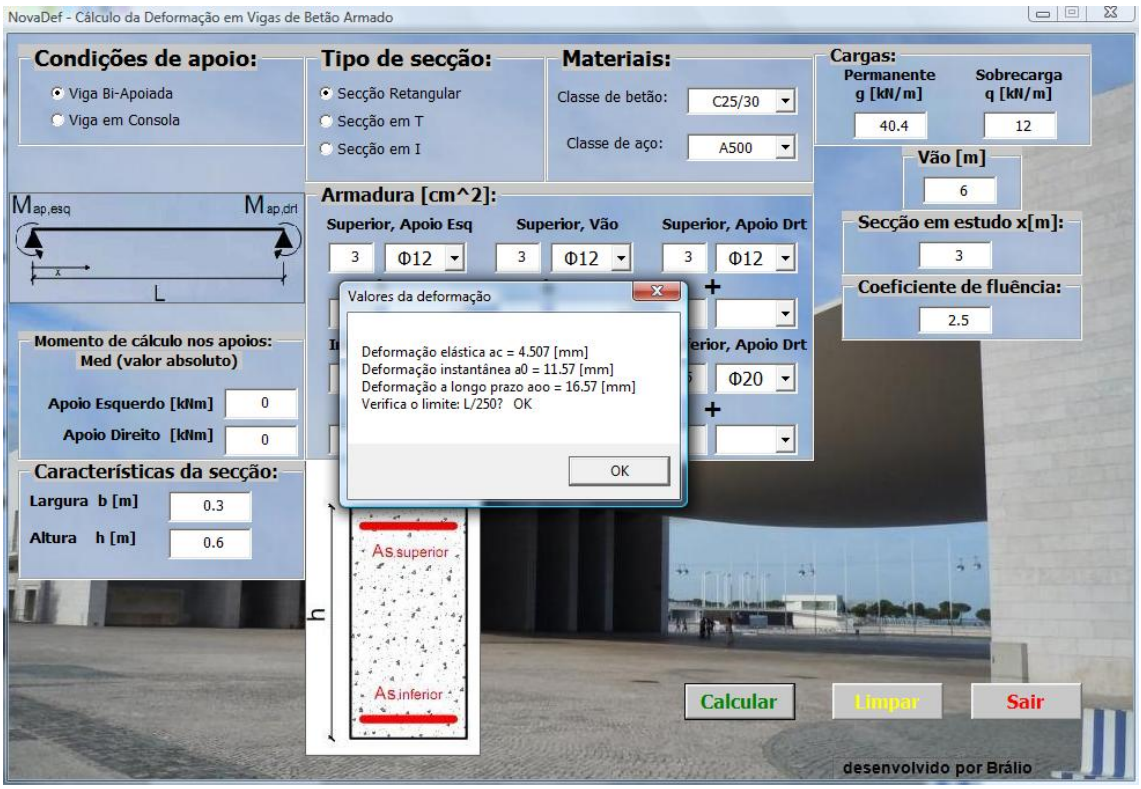


Fig. 3.34 – Caixa de mensagem com os valores da deformação (demonstração)

Passo 12: É perguntado ao utilizador se quer ou não obter um ficheiro em formato pdf, onde consta a informação detalhada do problema, através de gráficos e tabelas. Se responder afirmativamente o programa devolve o ficheiro pdf, caso o utilizador responda negativamente, o programa reinicia e volta à janela inicial (Fig. 3.28). A informação detalhada do exemplo desta demonstração encontra-se no anexo A5;

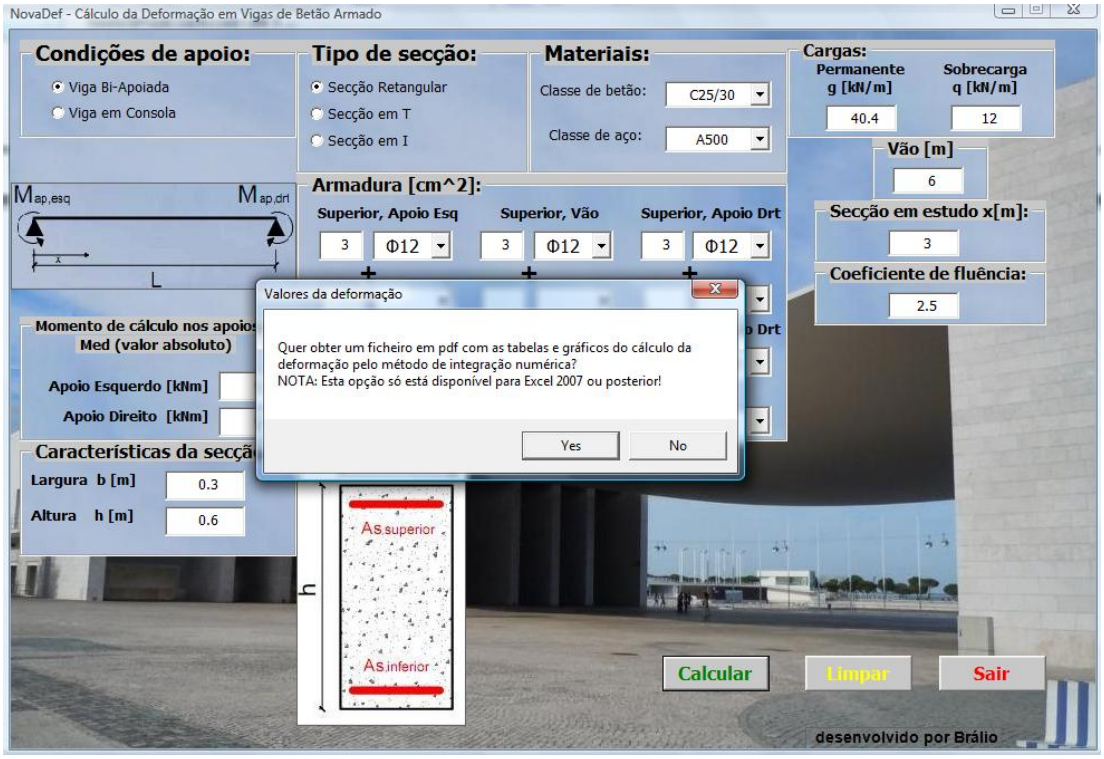


Fig. 3.35 – Caixa de mensagem (demonstração)

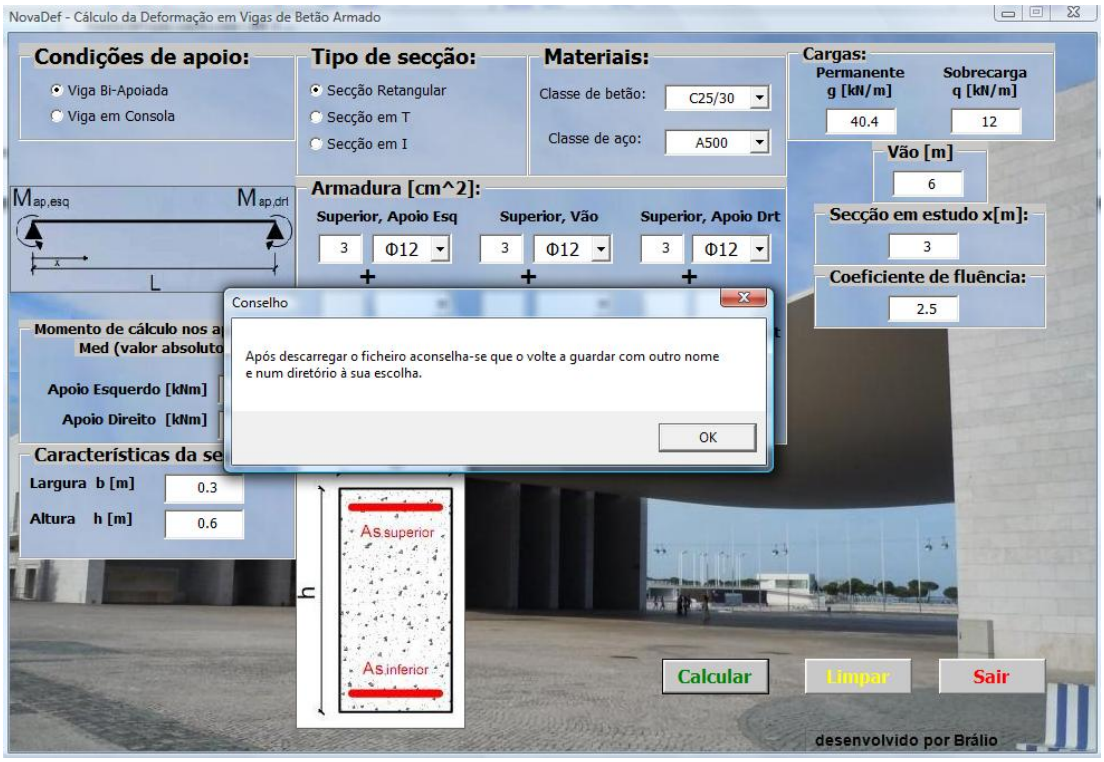


Fig. 3.36 – Caixa de mensagem com conselho (demonstração)

Passo 13: Após descarregar o ficheiro com a informação detalhada do cálculo da deformação, é perguntado ao utilizador se pretende voltar a usar o programa. Se sim, o programa reinicia, se o utilizador responder negativamente, o programa fecha.

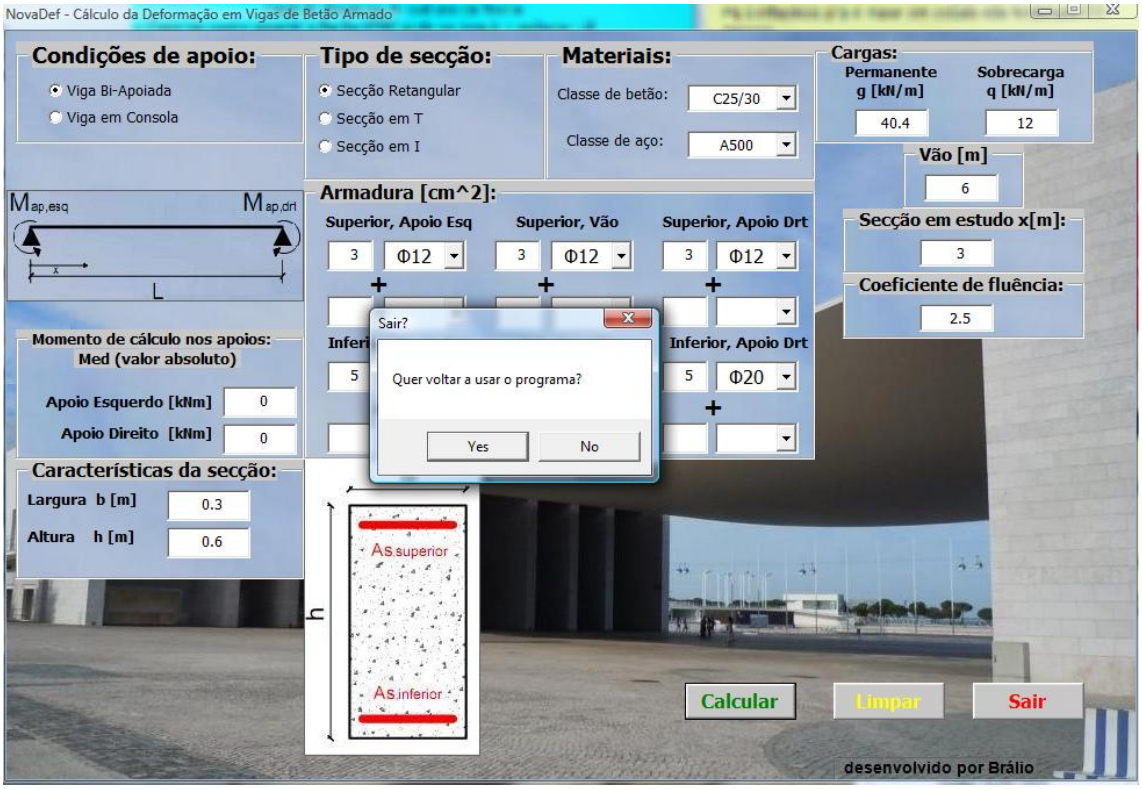


Fig. 3.37 – Caixa de mensagem para sair do programa (demonstração)

Capítulo 4

Exemplos de aplicação

Neste capítulo expor-se-ão quatro casos diferentes, com diferentes condições de apoio, de carregamento e da quantidade de armadura presente no elemento em estudo, os quais serão estudados para diferentes secções: retangular, em T e em I. Apresenta-se na tabela 4.1 um quadro resumo dos dados para cada caso em análise.

Caso	P_{qp} [kN/m]	Vão [m]	$M_{ap,esq}$ [kNm]	$M_{ap,drt}$ [kNm]	$As_{ap,esq}$ [cm^2]	$A's_{ap,esq}$ [cm^2]	$As_{vão}$ [cm^2]	$A's_{vão}$ [cm^2]	$As_{ap,drt}$ [cm^2]	$A's_{ap,drt}$ [cm^2]	Betão	Aço
A	44,0	6,0	0,0	0,0	15,71	3,39	15,71	3,39	15,71	3,39	C25/30	A500
B	44,0	6,0	-198,0	0,0	15,71	6,28	10,30	6,28	10,30	6,28		
C	44,0	6,0	-132,0	-132,0	10,05	4,02	6,03	4,02	10,05	4,02		
D	44,0	6,0	-66,0	-66,0	6,03	6,03	10,05	4,02	6,03	6,03		

Tabela 4.1 – Dados dos casos em análises

Será feita uma análise da deformação mediante os vários métodos de cálculo anteriormente descritos e posteriormente far-se-á uma análise comparativa dos resultados obtidos.

O comprimento do vão, o tipo de material, coeficiente de fluência assim como a carga permanente aplicada, serão idênticos nos vários casos de estudo para assim estar-se em condições de se fazer uma análise comparativa entre os vários casos.

No cálculo do valor final da flecha despreza-se a contribuição da retração, admitindo-se que tem uma influência na flecha final, pequena, em comparação com o efeito da fendilhação e da fluência do betão [6] (§ 5.3).

As vigas destes exemplos foram dimensionadas tendo em conta os estados limites últimos de flexão e esforço transverso. A carga de dimensionamento, p_{Ed}, admitida nestes cálculos foi de 72 kN/m e a carga correspondente à combinação de ações quase-permanentes é de 44 kN/m.

4.1. Viga simplesmente apoiada

<u>Caso A</u> (secção retangular):

Seja a viga de betão armado simplesmente apoiada representada na figura 4.1, à qual está aplicada uma carga quase permanente de 44,0 kN/m:

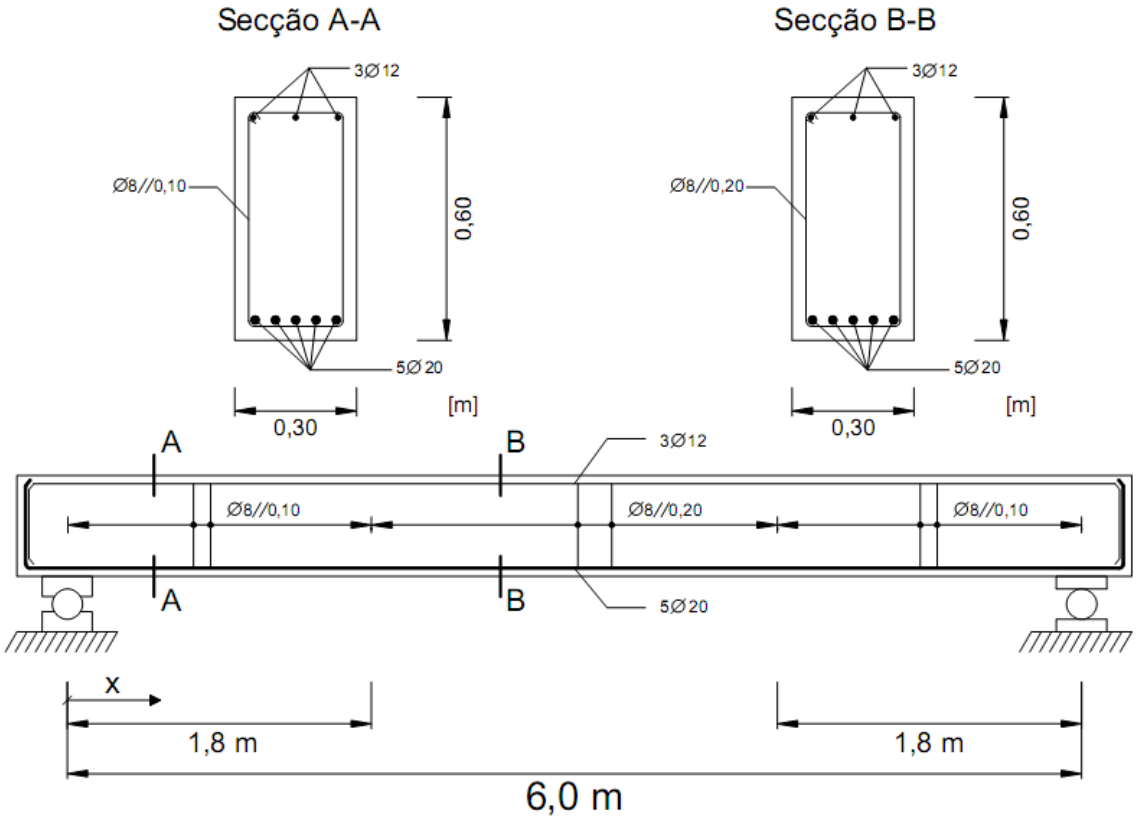


Fig. 4.1 – Pormenorização da armaduras (Caso A – secção retangular)

As principais características dos materiais são as seguintes:

- Betão C25/30; E_{cm} = 31 GPa; f_{ctm} = 2,6 MPa; f=2,5; c = 0,8
- Aço A500NR; E_s = 200 GPa

Método de integração numérica:

Como foi dito anteriormente o cálculo da flecha segundo o método de integração numérica foi realizado recorrendo ao programa Microsoft Office Excel 2007. O anexo A4.1 mostra a tabela com os valores do cálculo da flecha segundo este método.

Para $t = 0$:

$$a_0 = 11{,}6\ mm$$

Para $t = \infty$:

$$a_\infty = 16{,}6\ mm$$

Método bilinear:

- Flecha elástica:

$$a_c = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{(EI)_c} = \frac{5 \cdot 44{,}0 \cdot 6{,}0^4}{384 \cdot 31{,}0 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}} \cong 4{,}44 \cdot 10^{-3}\ m\ \cong 4{,}44\ mm$$

- Coeficientes *k*:

Para os parâmetros:

$$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$$

$$\frac{d'}{h} = \frac{0{,}05}{0{,}60} \cong 0{,}08$$

$$\alpha \cdot \rho = \frac{E_s}{E_{cm}} \cdot \frac{A_s}{bd} = \frac{200}{31} \cdot \frac{15{,}71 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55} \cong 0{,}06$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{A'_s}{A_s} \cong 0{,}25$$

$$\chi \cdot \varphi = 0{,}8 \cdot 2{,}5 = 2{,}0$$

os coeficientes de correção podem ser obtidos através dos ábacos expostos no anexo A2. Mediante algumas interpolações, vem que:

$$k_{s1} \cong 0{,}88;\ k_{\varphi 1} \cong 0{,}72;\ k_{s2} \cong 2{,}80;\ k_{\varphi 2} \cong 0{,}16$$

- Flecha em estado I e II:

vem pelas equações (3.4 e 3.5), que:

$$t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,0} = k_{s1} \cdot a_c = 0{,}88 \cdot 4{,}44 = 3{,}91\ \text{mm} \\ a_{II,0} = k_{s2} \cdot a_c = 2{,}80 \cdot 4{,}44 = 12{,}43\ mm \end{cases}$$

$$t = \infty \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = k_{s1} \cdot \left(1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 0{,}88 \cdot (1 + 0{,}72 \cdot 2{,}5) \cdot 4{,}44 \\ a_{II,\infty} = k_{s2} \cdot \left(1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 2{,}80 \cdot (1 + 0{,}16 \cdot 2{,}5) \cdot 4{,}44 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = 10{,}94\ \text{mm} \\ a_{II,\infty} = 17{,}40\ \text{mm} \end{cases}$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = \frac{p_{qp} \cdot L^2}{8} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} = 198{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

$$\mathrm{t} = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{46{,}8}{198{,}0}\right)^2 = 0{,}944$$

$$\mathrm{t} = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{46{,}8}{198{,}0}\right)^2 = 0{,}972$$

- Flecha estimada (eq. 2.17):

$$a = (1 - \zeta) \cdot a_I + \zeta \cdot a_{II}$$

$$t = 0 \Longrightarrow a_0 = (1 - 0{,}944) \cdot 3{,}91 + 0{,}944 \cdot 12{,}43 \cong 12{,}0\ mm$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = (1 - 0{,}972) \cdot 10{,}94 + 0{,}972 \cdot 17{,}40 \cong 17{,}2\ mm$$

Método dos coeficientes globais:

Para os parâmetros:

$$\varphi = 2{,}5$$

$$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$$

$$\alpha \cdot \rho = \frac{E_s}{E_{cm}} \cdot \frac{A_s}{bd} = \frac{200}{31} \cdot \frac{15{,}71 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55} \cong 0{,}06$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{A'_s}{A_s} \cong 0{,}25$$

com M_{cr} e M_{qp} calculados para a secção determinante (½ vão) , vem:

$$\frac{M_{cr}}{M_{qp}} = \frac{46{,}8}{198{,}0} \cong 0{,}24$$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 4{,}44\ mm$$

- Coeficientes de correção, k_t e k'_s:

através dos ábacos expostos no anexo A3, vem que:

$$k_t \cong 4{,}0;\ k'_s \cong 0{,}94$$

- Flecha estimada a longo prazo (eq. 3.7):

$$a = k_t \cdot k'_s \cdot a_c$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = 4{,}0 \cdot 0{,}94 \cdot 4{,}44 \cong 16{,}7\ mm$$

Método Model Code CEB-FIP 1990:

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 4{,}44\ mm$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = \frac{p_{qp} \cdot L^2}{8} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} = 198{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

Como $M_{qp} \geq M_{cr}$, então vem pela equação (3.11) que a flecha estimada a longo prazo é dada por:

$$a_\infty = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot \eta_\varphi \cdot (1 - 20 \cdot \rho'_m) \cdot a_c$$

para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5 \Longrightarrow \eta_\varphi = 1{,}0$

$\rho'_m = \frac{\mathrm{A'_s}}{\mathrm{b \cdot d}} = \frac{3{,}39 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55} = 2{,}06 \cdot 10^{-3}\ (\cong 0{,}21\%)$

$\rho_m = \frac{\mathrm{A_s}}{\mathrm{b \cdot d}} = \frac{15{,}71 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55} = 9{,}52 \cdot 10^{-3}\ (\cong 0{,}95\ \%)$

$\eta \cong 2{,}6$ (tabela 3.1)

vem que:

$$a_\infty = \left(\frac{0{,}60}{0{,}55}\right)^3 \cdot 2{,}6 \cdot 1{,}0 \cdot (1 - 20 \cdot 2{,}06 \cdot 10^{-3}) \cdot 4{,}44 \cdot 10^{-3} = 14{,}4 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 14{,}4\ mm$$

Método das secções determinantes:

Neste caso a secção determinante, corresponde à secção de ½ vão, onde o momento fletor positivo é máximo.

Pelas equações (3.22 e 3.23), vem que as flechas, instantânea e a longo prazo:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_\mathrm{m}} \cdot a_c$$

$$a_\infty = (1 + \varphi) \cdot \frac{I_c}{I_m} \cdot a_c$$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 4{,}44\ mm$$

- Momento fletor na secção determinante, M_{qp}:

  A secção determinante considerada corresponde à secção de meio vão onde o momento é máximo: $M_{qp} = 198\ kNm$.

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

$$\mathrm{t} = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{46{,}8}{198{,}0}\right)^2 = 0{,}944$$

$$\mathrm{t} = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{46{,}8}{198{,}0}\right)^2 = 0{,}972$$

- Momentos de inércia da secção determinante (§ 2.3.4):

$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}60^3}{12} = 0{,}00540\ m^4$$

Para $t = 0$:

$$\begin{cases} I_{I,0} = 0{,}00615\ m^4 \\ I_{II,0} = 0{,}00198\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,0} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta)\cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}00615 \cdot 0{,}00198}{(1-0{,}944)\cdot 0{,}00198 + 0{,}944 \cdot 0{,}00615} = 0{,}00206\ m^4$$

Para $t = \infty$:

$$\begin{cases} I_{I,\infty} = 0{,}00788\ m^4 \\ I_{II,\infty} = 0{,}00506\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,\infty} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta)\cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}00788 \cdot 0{,}00506}{(1-0{,}972)\cdot 0{,}00506 + 0{,}972 \cdot 0{,}00788} = 0{,}00511\ m^4$$

- Flecha estimada:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_{\mathrm{m},0}} \cdot a_c = \frac{0{,}00540}{0{,}00206} \cdot 4{,}44 \cdot 10^{-3} = 11{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$\Longrightarrow a_0 = 11{,}6\ \mathrm{mm}$$

$$a_\infty = (1+\varphi) \cdot \frac{I_c}{I_{m,\infty}} \cdot a_c = (1+2{,}5) \cdot \frac{0{,}00540}{0{,}00511} \cdot 4{,}44 \cdot 10^{-3} = 16{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 16{,}4\ \mathrm{mm}$$

4.2. Viga encastrada – apoiada

<u>Caso B</u> (secção retangular):

Seja a viga de betão armado encastrada - apoiada representada na figura 4.2.

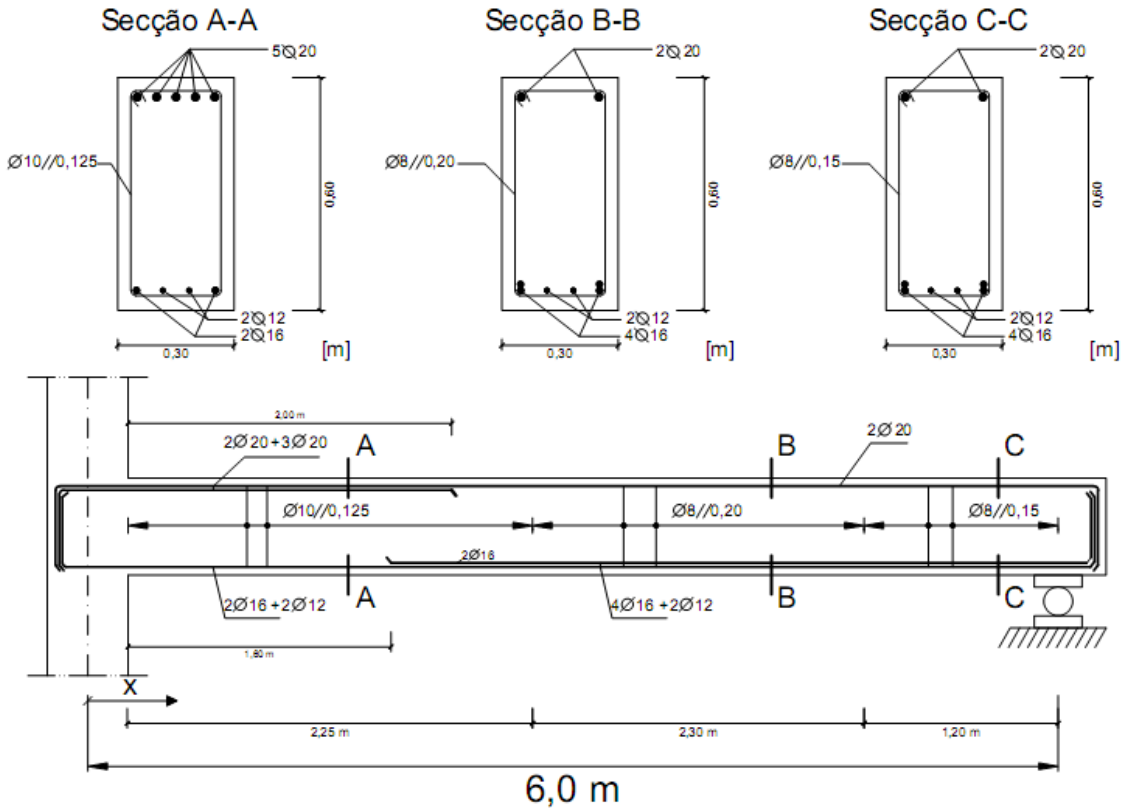


Fig. 4.2 - Pormenorização da armaduras (Caso B – secção retangular)

Assumiu-se a extremidade esquerda da viga como encastramento perfeito.

As principais características dos materiais são as seguintes:

- Betão C25/30; E_{cm} = 31 GPa; f_{ctm} = 2,6 MPa; f=2,5; c = 0,8
- Aço A500NR; E_s = 200 GPa
-

Método de integração numérica:

O cálculo da flecha segundo o método de integração numérica foi realizado recorrendo ao programa Microsoft Office Excel 2007. O anexo A4.2 mostra a tabela com os valores do cálculo da flecha segundo este método.

Para $t = 0$:

$$a_0 = 5{,}5\ mm$$

Para $t = \infty$:

$$a_\infty = 8{,}1\ mm$$

Método bilinear:

- Flecha elástica:

$$a_c = \frac{2{,}08}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{(EI)_c} = \frac{2{,}08 \cdot 44{,}0 \cdot 6{,}0^4}{384 \cdot 31{,}0 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}} \cong 1{,}84 \cdot 10^{-3}\ m\ \cong 1{,}84\ mm$$

- Percentagem média de armadura de tração, ρ_m, e compressão, ρ'_m:

Recorrendo às equações (3.6 e 3.17),vem:

$$\rho_m = \rho_a \cdot \frac{L_a}{L} + \rho_0 \cdot \frac{\mathrm{L}_0}{L} + \rho_b \cdot \frac{\mathrm{L}_b}{L}$$

$$\rho_m \cong \frac{\mathrm{A_{s,apoio}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}25 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{A_{s,vão}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}75 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} = 0{,}25 \cdot \frac{15{,}71 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55} + 0{,}75 \cdot \frac{10{,}30 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55}$$

$$\rho_m \cong 0{,}0071\ (0{,}71\%)$$

De forma análoga para a armadura de compressão, vem:

$$\rho'_m \cong 0{,}0038\ (0{,}38\%)$$

- Coeficientes *k*:

Para os parâmetros:

$$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$$

$$\frac{d'}{h} = \frac{0{,}05}{0{,}60} \cong 0{,}08$$

$$\alpha \cdot \rho_m = \frac{200}{31} \cdot 0{,}0071 \cong 0{,}05$$

$$\frac{\rho'_m}{\rho_m} = \frac{0{,}0038}{0{,}0071} \cong 0{,}55$$

$$\chi \cdot \varphi = 0{,}8 \cdot 2{,}5 = 2{,}0$$

os coeficientes de correção podem ser obtidos através dos ábacos expostos no anexo A2. Mediante algumas interpolações, vem que:

$$k_{s1} \cong 0{,}87;\ k_{\varphi 1} \cong 0{,}69;\ k_{s2} \cong 2{,}85;\ k_{\varphi 2} \cong 0{,}13$$

- Flecha em estado I e II:

vem pelas equações (3.4 e 3.5), que:

$$t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,0} = k_{s1} \cdot a_c = 0{,}87 \cdot 1{,}84 = 1{,}60\ \mathrm{mm} \\ a_{II,0} = k_{s2} \cdot a_c = 2{,}85 \cdot 1{,}84 = 5{,}24\ mm \end{cases}$$

$$t = \infty \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = k_{s1} \cdot \left(1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 0{,}87 \cdot (1 + 0{,}69 \cdot 2{,}5) \cdot 1{,}84 \\ a_{II,\infty} = k_{s2} \cdot \left(1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 2{,}85 \cdot (1 + 0{,}13 \cdot 2{,}5) \cdot 1{,}84 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = 4{,}36\ \mathrm{mm} \\ a_{II,\infty} = 6{,}95\ \mathrm{mm} \end{cases}$$

- Momento fletor na secção determinante (5/8 do vão):

$$M_{qp} = \frac{p_{qp} \cdot L^2}{14{,}2} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{14{,}2} \cong 111{,}6\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

$$\mathrm{t} = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{46{,}8}{111{,}6}\right)^2 = 0{,}824$$

$$\mathrm{t} = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{46{,}8}{111{,}6}\right)^2 = 0{,}912$$

- Flecha estimada (eq. 2.17):

$$a = (1 - \zeta) \cdot a_I + \zeta \cdot a_{II}$$

$$t = 0 \Longrightarrow a_0 = (1 - 0{,}824) \cdot 1{,}60 + 0{,}824 \cdot 5{,}24 \cong 4{,}6\ mm$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = (1 - 0{,}912) \cdot 4{,}36 + 0{,}912 \cdot 6{,}95 \cong 6{,}7\ mm$$

Método dos coeficientes globais:

Para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5$

$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$

$\alpha \cdot \rho_m =\cong 0{,}05$ (calculado anteriormente)

$\frac{\rho'_m}{\rho_m} \cong 0{,}5$ (calculado anteriormente)

com M_{cr} e M_{qp} calculados para a secção determinante (vão), vem:

$\frac{M_{cr}}{M_{qp}} = \frac{46{,}8}{111{,}6} \cong 0{,}42$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 1{,}84\ mm$$

- Coeficientes de correção, k_t e k'_s:

através dos ábacos expostos no anexo A3, vem que:

$$k_t \cong 4{,}3;\ k'_s \cong 0{,}90$$

- Flecha estimada a longo prazo (eq. 3.7):

$$a = k_t \cdot k'_s \cdot a_c$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = 4{,}3 \cdot 0{,}90 \cdot 1{,}84 \cong 7{,}1\ mm$$

Método Model Code CEB-FIP 1990:

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 1{,}84\ mm$$

- Momento fletor na secção determinante (5/8 do vão):

$$M_{qp} = \frac{p_{qp} \cdot L^2}{14{,}2} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} \cong 111{,}6\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

Como $M_{qp} \geq M_{cr}$, então vem pela equação (3.11) que a flecha estimada a longo prazo é dada por:

$$a_\infty = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot \eta_\varphi \cdot (1 - 20 \cdot \rho'_m) \cdot a_c$$

para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5 \Longrightarrow \eta_\varphi = 1{,}0$

$\rho'_m \cong 0{,}0038\ (\cong 0{,}38\%)$ (calculado anteriormente)

$\rho_m \cong 0{,}0071\ (\cong 0{,}71\ \%)$ (calculado anteriormente)

$\eta \cong 3{,}2$ (tabela 3.1)

vem que:

$$a_\infty = \left(\frac{0{,}60}{0{,}55}\right)^3 \cdot 3{,}2 \cdot 1{,}0 \cdot (1 - 20 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-3}) \cdot 1{,}84 \cdot 10^{-3} = 7{,}1 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 7{,}1\ mm$$

Método das secções determinantes:

Neste caso considerar-se-á como secção determinantes, a secção a 5/8 do vão, onde o momento positivo é máximo. O valor de cálculo da flecha será o obtido considerando as características da secção determinante.

Pelas equações (3.22 e 3.23), vem que as flechas, instantânea e a longo prazo:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_\mathrm{m}} \cdot a_c$$

$$a_\infty = (1 + \varphi) \cdot \frac{I_c}{I_m} \cdot a_c$$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 1{,}84\ mm$$

- Momento fletor nas secções determinantes, M_{qp}:

<u>Secção determinante - 5/8 do vão:</u>

$M_{qp} = \frac{p_{qp} \cdot L^2}{14{,}2} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{14{,}2} \cong 111{,}6\ kNm.$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

  <u>Secção determinante - 5/8 do vão:</u>

$$\mathrm{t} = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{46{,}8}{111{,}6}\right)^2 = 0{,}824$$

$$\mathrm{t} = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{46{,}8}{111{,}6}\right)^2 = 0{,}912$$

- Momentos de inércia na secção determinante (§ 2.3.4):

  <u>Secção determinante - 5/8 do vão:</u>

$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}60^3}{12} = 0{,}00540\ m^4$$

Para $t = 0$:

$$\begin{cases} I_{I,0} = 0{,}00607\ m^4 \\ I_{II,0} = 0{,}00142\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,0} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}00607 \cdot 0{,}00142}{(1-0{,}824) \cdot 0{,}00142 + 0{,}824 \cdot 0{,}00607} = 0{,}00164\ m^4$$

Para $t = \infty$:

$$\begin{cases} I_{I,\infty} = 0{,}00772\ m^4 \\ I_{II,\infty} = 0{,}00397\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,\infty} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}00772 \cdot 0{,}00397}{(1-0{,}912) \cdot 0{,}00397 + 0{,}912 \cdot 0{,}00772} = 0{,}00415\ m^4$$

- Flecha estimada:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_{m,0}} \cdot a_c = \frac{0{,}00540}{0{,}00164} \cdot 1{,}84 \cdot 10^{-3} = 6{,}1 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_0 = 6{,}1\ mm$$

$$a_\infty = (1+\varphi) \cdot \frac{I_c}{I_{m,\infty}} \cdot a_c = (1+2{,}5) \cdot \frac{0{,}00540}{0{,}00415} \cdot 1{,}84 \cdot 10^{-3} = 8{,}4 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 8{,}4\ mm$$

4.3. Viga bi – encastrada

<u>Caso C</u> (secção retangular):

Seja a viga de betão armado encastrada - encastrada representada na figura 4.3.

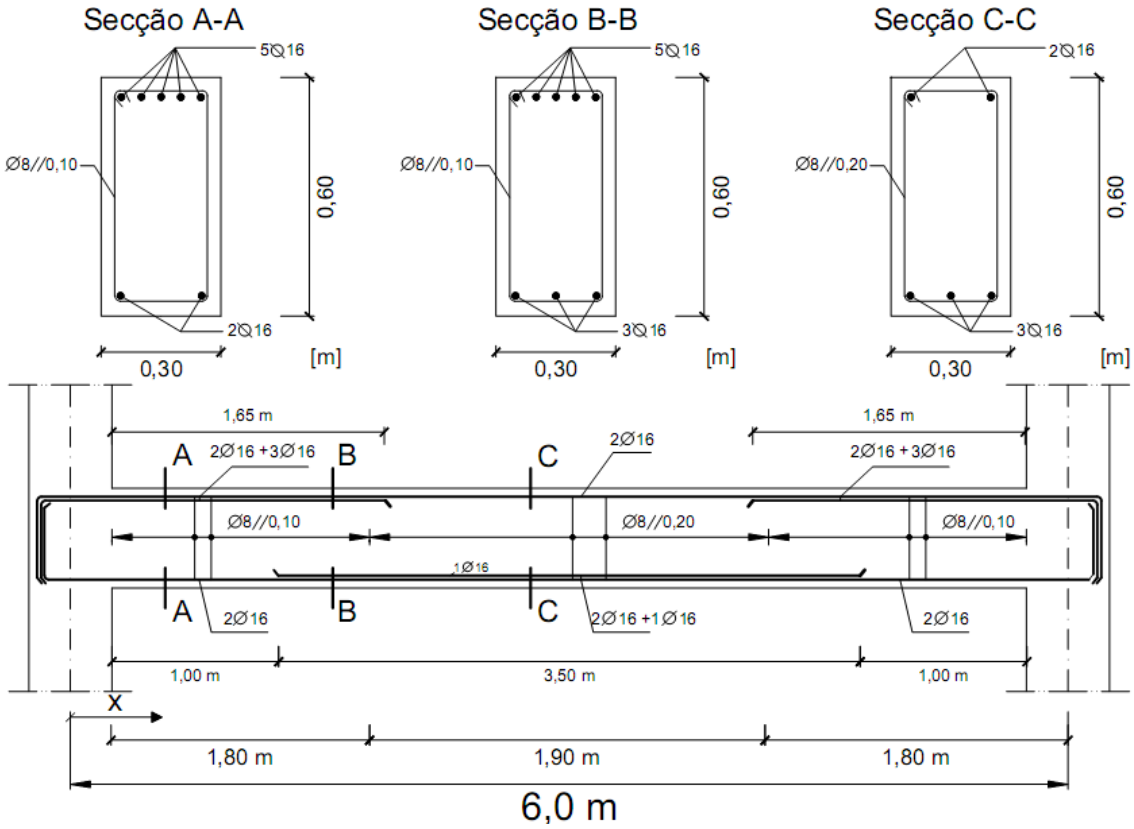


Fig. 4.3 – Pormenorização da armaduras (Caso C – secção retangular)

Assumiu-se encastramento perfeito em ambas as extremidades da viga.

As principais características dos materiais são as seguintes:

- Betão C25/30; E_{cm} = 31 GPa; f_{ctm} = 2,6 MPa; f=2,5; c = 0,8
- Aço A500NR; E_s = 200 GPa

Método de integração numérica:

O cálculo da flecha segundo o método de integração numérica foi realizado recorrendo ao programa Microsoft Office Excel 2007. O anexo A4.3 mostra a tabela com os valores do cálculo da flecha segundo este método.

Para $t = 0$:

$$a_0 = 2{,}4\ mm$$

Para $t = \infty$:

$$a_\infty = 4{,}9\ mm$$

Método bilinear:

- Flecha elástica:

$$a_c = \frac{1}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{(EI)_c} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^4}{384 \cdot 31{,}0 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}} \cong 1{,}84 \cdot 10^{-3}\ m\ \cong 0{,}89\ mm$$

- Percentagem média de armadura de tração, ρ_m, e compressão, ρ'_m:

  Recorrendo às equações (3.6 e 3.17),vem:

$$\rho_m = \rho_a \cdot \frac{L_a}{L} + \rho_0 \cdot \frac{\mathrm{L}_0}{L} + \rho_b \cdot \frac{\mathrm{L}_b}{L}$$

$$\rho_m \cong \frac{\mathrm{A_{s,apoio\ A}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}21 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{A_{s,vão}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}58 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{A_{s,apoio\ B}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}21 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} =$$

$$= 0{,}21 \cdot \frac{10{,}05 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55} + 0{,}58 \cdot \frac{6{,}03 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55} + 0{,}21 \cdot \frac{10{,}05 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55}$$

$$\Longrightarrow \rho_m \cong 0{,}0047\ (0{,}47\%)$$

  De forma análoga para a armadura de compressão, vem:

$$\rho'_m \cong 0{,}0024\ (0{,}24\%)$$

- Coeficientes *k*:

  Para os parâmetros:

$$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$$

$$\frac{d'}{h} = \frac{0{,}05}{0{,}60} \cong 0{,}08$$

$$\alpha \cdot \rho_m = \frac{200}{31} \cdot 0{,}0047 \cong 0{,}03$$

$$\frac{\rho'_m}{\rho_m} = \frac{0{,}0024}{0{,}0047} \cong 0{,}50$$

$$\chi \cdot \varphi = 0{,}8 \cdot 2{,}5 = 2{,}0$$

  os coeficientes de correção podem ser obtidos através dos ábacos expostos no anexo A2. Mediante algumas interpolações, vem que:

$$k_{s1} \cong 0{,}92;\ k_{\varphi 1} \cong 0{,}80;\ k_{s2} \cong 5{,}00;\ k_{\varphi 2} \cong 0{,}11$$

- Flecha em estado I e II:

  vem pelas equações (3.4 e 3.5), que:

$$t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,0} = k_{s1} \cdot a_c = 0{,}92 \cdot 0{,}89 = 0{,}82\ \mathrm{mm} \\ a_{II,0} = k_{s2} \cdot a_c = 5{,}00 \cdot 0{,}89 = 4{,}45\ mm \end{cases}$$

$$t = \infty \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = k_{s1} \cdot \left(1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 0{,}92 \cdot (1 + 0{,}80 \cdot 2{,}5) \cdot 0{,}89 \\ a_{II,\infty} = k_{s2} \cdot \left(1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 5{,}00 \cdot (1 + 0{,}11 \cdot 2{,}5) \cdot 0{,}89 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = 2{,}46\ \mathrm{mm} \\ a_{II,\infty} = 5{,}67\ \mathrm{mm} \end{cases}$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = \frac{p_{qp} \cdot L^2}{24} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{24} = 66{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

$$\mathrm{t} = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{46{,}8}{66{,}0}\right)^2 = 0{,}497$$

$$\mathrm{t} = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{46{,}8}{66{,}0}\right)^2 = 0{,}749$$

- Flecha estimada (eq. 2.17):

$$a = (1 - \zeta) \cdot a_I + \zeta \cdot a_{II}$$

$$t = 0 \Longrightarrow a_0 = (1 - 0{,}497) \cdot 0{,}82 + 0{,}497 \cdot 4{,}45 \cong 2{,}6\ mm$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = (1 - 0{,}749) \cdot 2{,}46 + 0{,}749 \cdot 5{,}67 \cong 4{,}9\ mm$$

Método dos coeficientes globais:

Para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5$

$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$

$\alpha \cdot \rho_m =\cong 0{,}03$ (calculado anteriormente)

$\frac{\rho'_m}{\rho_m} \cong 0{,}5$ (calculado anteriormente)

com M_{cr} e M_{qp} calculados para a secção determinante (½ vão), vem:

$\frac{M_{cr}}{M_{qp}} = \frac{46{,}8}{66{,}0} \cong 0{,}71$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 0{,}89\ mm$$

- Coeficientes de correção, k_t e k'_s:

através dos ábacos expostos no anexo A3, vem que:

$$k_t = 5{,}45;\ k'_s \cong 0{,}94$$

- Flecha estimada a longo prazo (eq. 3.7):

$$a = k_t \cdot k'_s \cdot a_c$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = 5{,}45 \cdot 0{,}94 \cdot 0{,}89 \cong 4{,}6\ mm$$

Método Model Code CEB-FIP 1990:

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 0{,}89\ mm$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = \frac{p_{qp} \cdot L^2}{24} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{24} = 66{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

Como $M_{qp} \geq M_{cr}$, então vem pela equação (3.11) que a flecha estimada a longo prazo é dada por:

$$a_\infty = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot \eta_\varphi \cdot (1 - 20 \cdot \rho'_m) \cdot a_c$$

para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5 \Longrightarrow \eta_\varphi = 1{,}0$

$\rho'_m \cong 0{,}0024\ (\cong 0{,}24\%)$ (calculado anteriormente)

$\rho_m \cong 0{,}0047\ (\cong 0{,}47\ \%)$ (calculado anteriormente)

$\eta \cong 4{,}3$ (tabela 3.1)

vem que:

$$a_\infty = \left(\frac{0{,}60}{0{,}55}\right)^3 \cdot 4{,}3 \cdot 1{,}0 \cdot (1 - 20 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-3}) \cdot 0{,}89 \cdot 10^{-3} = 4{,}7 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 4{,}7mm$$

Método das secções determinantes:

Neste caso a secção determinante a considerar é a secção de 1/2 vão, onde o momento positivo é máximo. O valor de cálculo da flecha será o obtido considerando as características da secção determinante.

Pelas equações (3.22 e 3.23), vem que as flechas, instantânea e a longo prazo:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_\mathrm{m}} \cdot a_c$$

$$a_\infty = (1 + \varphi) \cdot \frac{I_c}{I_m} \cdot a_c$$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 0{,}89\ mm$$

- Momento fletor na secção determinante, M_{qp}:

<u>Secção determinante – 1/2 vão:</u>

$M_{qp} = \frac{p_{qp} \cdot L^2}{24} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{24} = 66{,}0\ kNm.$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

  <u>Secção determinante - 1/2 vão:</u>

$$\mathrm{t} = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{46{,}8}{66{,}0}\right)^2 = 0{,}497$$

$$\mathrm{t} = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{46{,}8}{66{,}0}\right)^2 = 0{,}749$$

- Momentos de inércia na secção determinante (§ 2.3.4):

  <u>Secção determinante – 1/2 vão:</u>

$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}60^3}{12} = 0{,}00540\ m^4$$

Para $t = 0$:

$$\begin{cases} I_{I,0} = 0{,}00580\ m^4 \\ I_{II,0} = 0{,}00089\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,0} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}00580 \cdot 0{,}00089}{(1-0{,}497) \cdot 0{,}00089 + 0{,}497 \cdot 0{,}00580} = 0{,}00155\ m^4$$

Para $t = \infty$:

$$\begin{cases} I_{I,\infty} = 0{,}00681\ m^4 \\ I_{II,\infty} = 0{,}00259\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,\infty} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}00681 \cdot 0{,}00259}{(1-0{,}749) \cdot 0{,}00259 + 0{,}749 \cdot 0{,}00681} = 0{,}00307\ m^4$$

- Flecha estimada:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_{m,0}} \cdot a_c = \frac{0{,}00540}{0{,}00155} \cdot 0{,}89 \cdot 10^{-3} = 3{,}1 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_0 = 3{,}1\ mm$$

$$a_\infty = (1+\varphi) \cdot \frac{I_c}{I_{m,\infty}} \cdot a_c = (1+2{,}5) \cdot \frac{0{,}00540}{0{,}00307} \cdot 0{,}89 \cdot 10^{-3} = 5{,}5 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 5{,}5\ mm$$

<u>Caso C</u> (secção em T):

Seja a viga de betão armado encastrada - encastrada representada na figura 4.4.

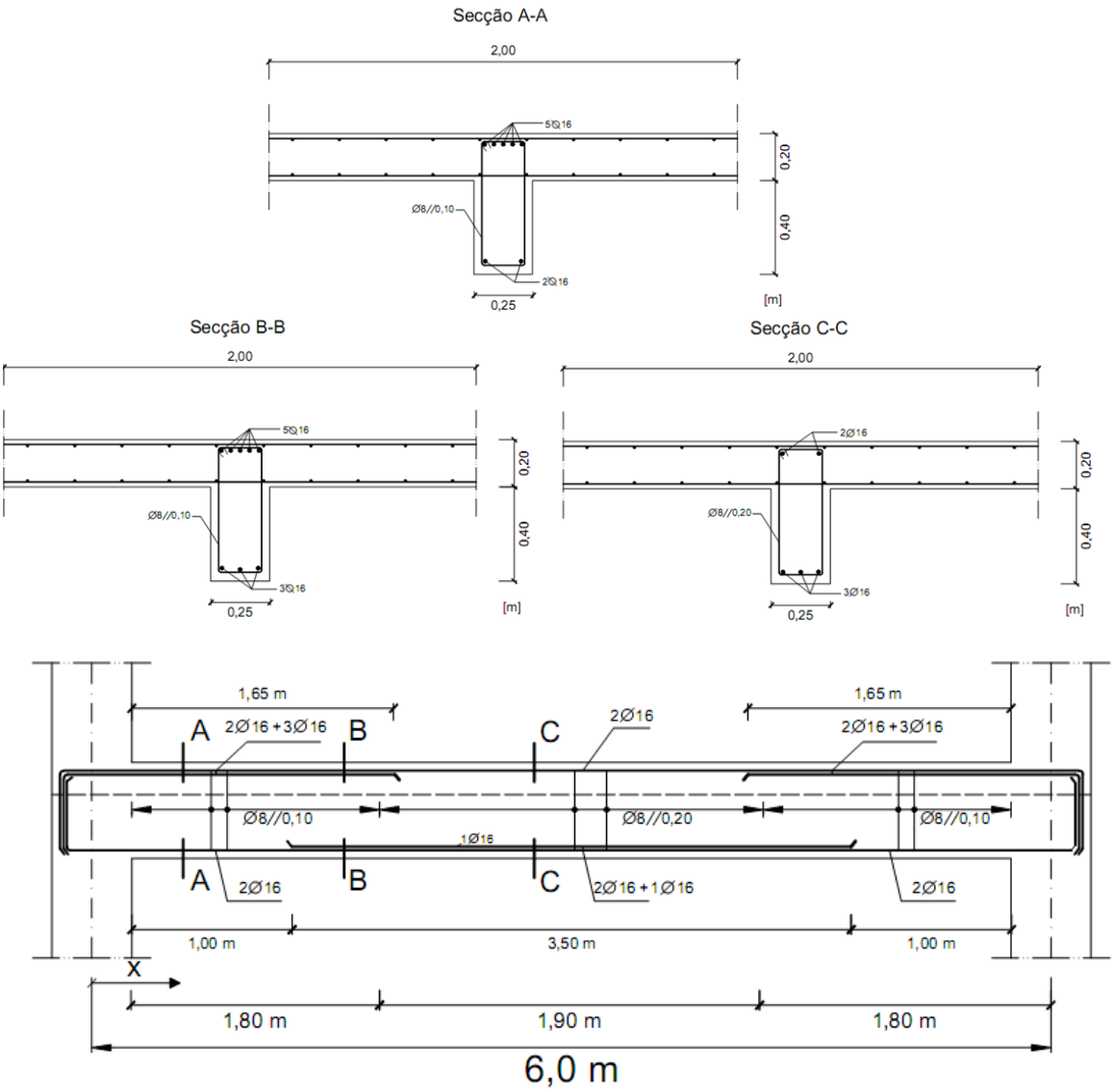


Fig. 4.4 – Pormenorização da armaduras (Caso C – secção em T)

Assumiu-se encastramento perfeito em ambas as extremidades da viga.

As principais características dos materiais são as seguintes:

- Betão C25/30; E_{cm} = 31 GPa; f_{ctm} = 2,6 MPa; f=2,5; c = 0,8
- Aço A500NR; E_s = 200 GPa

Método de integração numérica:

O cálculo da flecha segundo o método de integração numérica foi realizado recorrendo ao programa Microsoft Office Excel 2007. O anexo A4.4 mostra a tabela com os valores do cálculo da flecha segundo este método.

Para $t = 0$:

$$a_0 = 0{,}9\ mm$$

Para $t = \infty$:

$$a_\infty = 2{,}3\ mm$$

Método bilinear:

- Momento de Inércia, I_c (§ 2.3.4):

$$I_c = 0{,}00987\ m^4$$

- Flecha elástica:

$$a_c = \frac{1}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{(EI)_c} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^4}{384 \cdot 31{,}0 \cdot 10^6 \cdot 9{,}87 \cdot 10^{-3}} \cong 0{,}49 \cdot 10^{-3}\ m\ \cong 0{,}49\ mm$$

- Percentagem média de armadura de tração, ρ_m, e compressão, ρ'_m:

Recorrendo às equações (3.6 e 3.17),vem:

$$\rho_m = \rho_a \cdot \frac{L_a}{L} + \rho_0 \cdot \frac{\mathrm{L}_0}{L} + \rho_b \cdot \frac{\mathrm{L}_b}{L}$$

$$\rho_m \cong \frac{\mathrm{A_{s,apoio\ A}}}{\mathrm{b_f \cdot d}} \cdot \frac{0{,}21 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{A_{s,vão}}}{\mathrm{b_w \cdot d}} \cdot \frac{0{,}58 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{A_{s,apoio\ B}}}{\mathrm{b_f \cdot d}} \cdot \frac{0{,}21 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} =$$

$$= 0{,}21 \cdot \frac{10{,}05 \cdot 10^{-4}}{2{,}0 \cdot 0{,}55} + 0{,}58 \cdot \frac{6{,}03 \cdot 10^{-4}}{0{,}25 \cdot 0{,}55} + 0{,}21 \cdot \frac{10{,}05 \cdot 10^{-4}}{2{,}0 \cdot 0{,}55}$$

$$\Longrightarrow \rho_m \cong 0{,}0027\ (0{,}27\%)$$

De forma análoga para a armadura de compressão, vem:

$$\rho'_m \cong 0{,}0018\ (0{,}18\%)$$

- Coeficientes *k*:

Para os parâmetros:

$$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$$

$$\frac{d'}{h} = \frac{0{,}05}{0{,}60} \cong 0{,}08$$

$$\alpha \cdot \rho_m = \frac{200}{31} \cdot 0{,}0027 \cong 0{,}0175$$

$$\frac{\rho'_m}{\rho_m} = \frac{0{,}0024}{0{,}0047} \cong 0{,}65$$

$$\chi \cdot \varphi = 0{,}8 \cdot 2{,}5 = 2{,}0$$

os coeficientes de correção podem ser obtidos através dos ábacos expostos no anexo A2. Mediante algumas interpolações, vem que:

$$k_{s1} \cong 0{,}95;\ k_{\varphi 1} \cong 0{,}87;\ k_{s2} \cong 8{,}50;\ k_{\varphi 2} \cong 0{,}07$$

- Flecha em estado I e II:

vem pelas equações (3.4 e 3.5), que:

$$t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,0} = k_{s1} \cdot a_c = 0{,}95 \cdot 0{,}49 = 0{,}47\ mm \\ a_{II,0} = k_{s2} \cdot a_c = 5{,}00 \cdot 0{,}89 = 4{,}17\ mm \end{cases}$$

$$t = \infty \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = k_{s1} \cdot \left(1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 0{,}95 \cdot (1 + 0{,}87 \cdot 2{,}5) \cdot 0{,}49 \\ a_{II,\infty} = k_{s2} \cdot \left(1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 8{,}50 \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 2{,}5) \cdot 0{,}49 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{a_{I,\infty}} = 1{,}48\ \mathrm{mm} \\ \mathrm{a_{II,\infty}} = 4{,}89\ \mathrm{mm} \end{cases}$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = \frac{p_{qp} \cdot L^2}{24} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{24} = 66{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} \cong 58{,}3\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

$$\mathrm{t} = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{58{,}3}{66{,}0}\right)^2 = 0{,}220$$

$$\mathrm{t} = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{58{,}3}{66{,}0}\right)^2 = 0{,}610$$

- Flecha estimada (eq. 2.17):

$$a = (1 - \zeta) \cdot a_I + \zeta \cdot a_{II}$$

$$t = 0 \Longrightarrow a_0 = (1 - 0{,}220) \cdot 0{,}47 + 0{,}220 \cdot 4{,}17 \cong 1{,}3\ mm$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = (1 - 0{,}610) \cdot 1{,}48 + 0{,}610 \cdot 4{,}89 \cong 3{,}6\ mm$$

Método dos coeficientes globais:

Para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5$

$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$

$\alpha \cdot \rho_m =\cong 0{,}0175$ (calculado anteriormente)

$\frac{\rho'_m}{\rho_m} \cong 0{,}65$ (calculado anteriormente)

com M_{cr} e M_{qp} calculados para a secção determinante (½ vão), vem:

$\frac{M_{cr}}{M_{qp}} = \frac{58{,}3}{66{,}0} \cong 0{,}88$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 0{,}49\ mm$$

- Coeficientes de correção, k_t e k'_s:

através dos ábacos expostos no anexo A3, vem que:

$$k_t = 7{,}00;\ k'_s \cong 0{,}95$$

- Flecha estimada a longo prazo (eq. 3.7):

$$a = k_t \cdot k'_s \cdot a_c$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = 7{,}00 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}49 \cong 3{,}3\ mm$$

Método Model Code CEB-FIP 1990:

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 0{,}49\ mm$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = \frac{p_{qp} \cdot L^2}{24} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{24} = 66{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} \cong 58{,}3\ kNm$$

Como $M_{qp} \geq M_{cr}$, então vem pela equação (3.11) que a flecha estimada a longo prazo é dada por:

$$a_\infty = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot \eta_\varphi \cdot (1 - 20 \cdot \rho'_m) \cdot a_c$$

para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5 \Longrightarrow \eta_\varphi = 1{,}0$

$\rho'_m \cong 0{,}0018\ (\cong 0{,}18\%)$ (calculado anteriormente)

$\rho_m \cong 0{,}0027\ (\cong 0{,}27\ \%)$ (calculado anteriormente)

$\eta \cong 6{,}6$ (tabela 3.1)

vem que:

$$a_\infty = \left(\frac{0{,}60}{0{,}55}\right)^3 \cdot 6{,}6 \cdot 1{,}0 \cdot (1 - 20 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3}) \cdot 0{,}49 \cdot 10^{-3} = 2{,}2 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 2{,}2\ mm$$

Método das secções determinantes:

Neste caso a secção determinante a considerar é a secção de 1/2 vão, onde o momento positivo é máximo. O valor de cálculo da flecha será o obtido considerando as características da secção determinante.

Pelas equações (3.22 e 3.23), vem que as flechas, instantânea e a longo prazo:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_\mathrm{m}} \cdot a_c$$

$$a_\infty = (1 + \varphi) \cdot \frac{I_c}{I_m} \cdot a_c$$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 0{,}49\ mm$$

- Momento fletor na secção determinante, M_{qp}:

<u>Secção determinante – 1/2 vão:</u>

$M_{qp} = \frac{p_{qp} \cdot L^2}{24} = \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{24} = 66{,}0\ kNm.$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} \cong 58{,}3\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

  <u>Secção determinante - 1/2 vão:</u>

$$\mathrm{t} = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{58{,}3}{66{,}0}\right)^2 = 0{,}220$$

$$\mathrm{t} = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{58{,}3}{66{,}0}\right)^2 = 0{,}610$$

- Momentos de inércia na secção determinante (§ 2.3.4):

  <u>Secção determinante – 1/2 vão:</u>

  Através das equações (2.52 e 2.53), vem que:

  Momento de inércia elástico, I_c:

$$I_c = \frac{b_f \cdot {h_f}^3}{12} + b_f \cdot h_f \cdot \left(x_{LN} - \frac{h_f}{2}\right)^2 + \frac{b_w \cdot {h_w}^3}{12} + b_w \cdot h_w \cdot \left(h_f + \frac{h_w}{2} - x_{LN}\right)^2$$

$$\Longrightarrow I_c = 0{,}00987\ m^4$$

  onde:

$$x_{LN} = \frac{b_f \cdot h_f \cdot \frac{h_f}{2} + b_w \cdot h_w \cdot \left(h_f + \frac{h_w}{2}\right)}{b_f \cdot h_f + b_w \cdot h_w} \Longrightarrow x_{LN} = 0{,}160\ m$$

  Para $t = 0$:

$$\begin{cases} I_{I,0} = 0{,}01049\ m^4 \\ I_{II,0} = 0{,}00105\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,0} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}01049 \cdot 0{,}00105}{(1-0{,}220) \cdot 0{,}00105 + 0{,}220 \cdot 0{,}01049} = 0{,}00353\ m^4$$

  Para $t = \infty$:

$$\begin{cases} I_{I,\infty} = 0{,}01201\ m^4 \\ I_{II,\infty} = 0{,}00336\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,\infty} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}01201 \cdot 0{,}00336}{(1-0{,}610) \cdot 0{,}00336 + 0{,}610 \cdot 0{,}01201} = 0{,}00467\ m^4$$

- Flecha estimada:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_{m,0}} \cdot a_c = \frac{0{,}00987}{0{,}00353} \cdot 0{,}49 \cdot 10^{-3} = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_0 = 1{,}4\ mm$$

$$a_\infty = (1+\varphi) \cdot \frac{I_c}{I_{m,\infty}} \cdot a_c = (1+2{,}5) \cdot \frac{0{,}00987}{0{,}00467} \cdot 0{,}49 \cdot 10^{-3} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 3{,}6\ mm$$

4.4. Viga com continuidade

<u>Caso D</u> (secção retangular):

Seja a viga de continuidade de betão armado representada na figura 4.5.

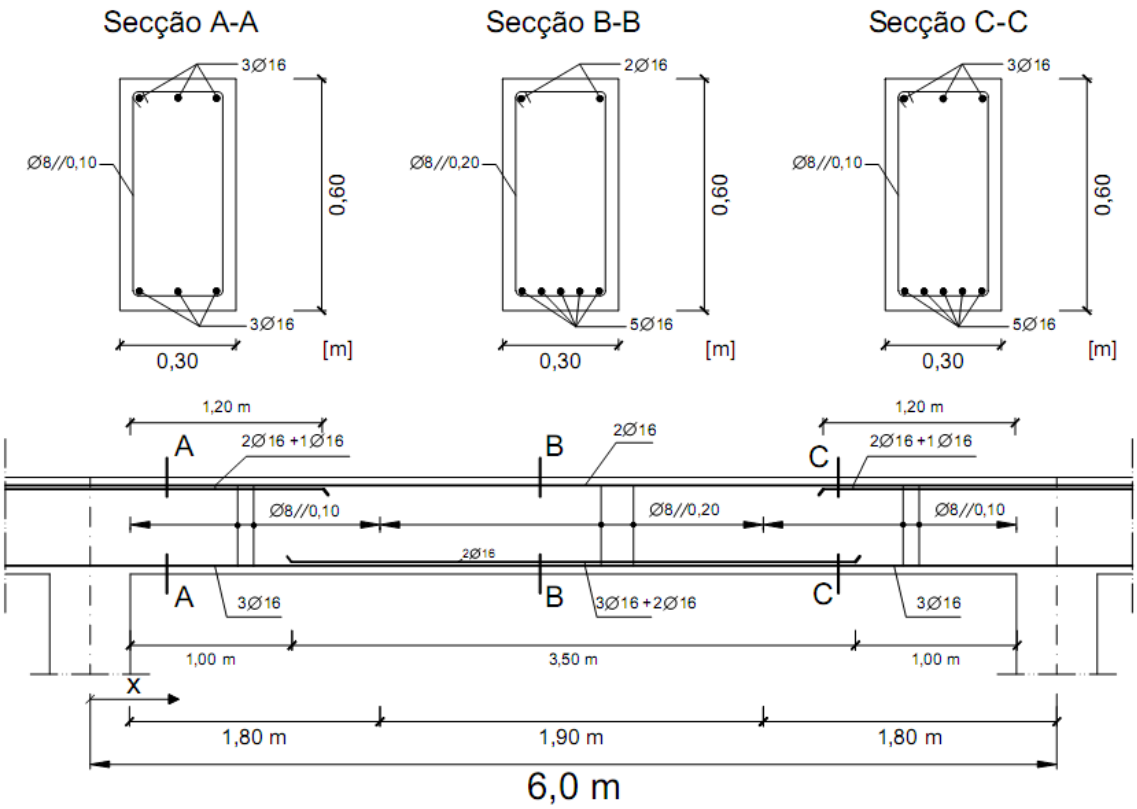


Fig. 4.5 – Pormenorização da armaduras (Caso D – secção retangular)

As principais características dos materiais são as seguintes:

- Betão C25/30; E_{cm} = 31 GPa; f_{ctm} = 2,6 MPa; f=2,5; c = 0,8
- Aço A500NR; E_s = 200 GPa

Método de integração numérica:

O cálculo da flecha segundo o método de integração numérica foi realizado recorrendo ao programa Microsoft Office Excel 2007. O anexo A4.5 mostra a tabela com os valores do cálculo da flecha segundo este método.

Para $t = 0$:

$$a_0 = 9{,}0\ mm$$

Para $t = \infty$:

$$a_\infty = 12{,}9\ mm$$

Método bilinear:

- Flecha elástica:

  A flecha elástica neste caso será igual à soma da flecha elástica da viga bi-encastrada do caso C com a flecha elástica, da viga do problema, resultante da aplicação de um momento positivo, de 66 kNm, nos apoios. Vem então, com base no anexo A1, que:

$$a_c = \left[\frac{1}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{(EI)_c}\right] + 2 \cdot \left[\frac{1}{16} \cdot \frac{M \cdot L^2}{(EI)_c}\right]$$

$$a_c = \left[\frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^4}{384 \cdot 31{,}0 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}\right] + 2 \cdot \left[\frac{66 \cdot 6^2}{16 \cdot 31{,}0 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}\right]$$

$$a_c \cong 0{,}89 + 1{,}77 \Longrightarrow a_c \cong 2{,}66\ mm$$

- Percentagem média de armadura de tração, ρ_m, e compressão, ρ'_m:

  Recorrendo às equações (3.6 e 3.17),vem:

$$\rho_m = \rho_a \cdot \frac{L_a}{L} + \rho_0 \cdot \frac{\mathrm{L}_0}{L} + \rho_b \cdot \frac{\mathrm{L}_b}{L}$$

$$\rho_m \cong \frac{\mathrm{A_{s,apoio\ A}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}21 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{A_{s,vão}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}58 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{A_{s,apoio\ B}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}21 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} =$$

$$= 0{,}21 \cdot \frac{6{,}03 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55} + 0{,}58 \cdot \frac{10{,}05 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55} + 0{,}21 \cdot \frac{6{,}03 \cdot 10^{-4}}{0{,}30 \cdot 0{,}55}$$

$$\Longrightarrow \rho_m \cong 0{,}0051\ (0{,}51\%)$$

  De forma análoga para a armadura de compressão, vem:

$$\rho'_m \cong 0{,}0029\ (0{,}29\%)$$

- Coeficientes *k*:

  Para os parâmetros:

$$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$$

$$\frac{d'}{h} = \frac{0{,}05}{0{,}60} \cong 0{,}08$$

$$\alpha \cdot \rho_m = \frac{200}{31} \cdot 0{,}0051 \cong 0{,}03$$

$$\frac{\rho'_m}{\rho_m} = \frac{0{,}0029}{0{,}0051} \cong 0{,}60$$

$$\chi \cdot \varphi = 0{,}8 \cdot 2{,}5 = 2{,}0$$

  os coeficientes de correção podem ser obtidos através dos ábacos expostos no anexo A2. Mediante algumas interpolações, vem que:

$$k_{s1} \cong 0{,}92;\ k_{\varphi 1} \cong 0{,}79;\ k_{s2} \cong 4{,}92;\ k_{\varphi 2} \cong 0{,}09$$

- Flecha em estado I e II:

  vem pelas equações (3.4 e 3.5), que:

$$t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,0} = k_{s1} \cdot a_c = 0{,}92 \cdot 2{,}66 = 2{,}45\ mm \\ a_{II,0} = k_{s2} \cdot a_c = 4{,}92 \cdot 2{,}66 = 13{,}09\ mm \end{cases}$$

$$t = \infty \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = k_{s1} \cdot \left(1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 0{,}92 \cdot (1 + 0{,}79 \cdot 2{,}5) \cdot 2{,}66 \\ a_{II,\infty} = k_{s2} \cdot \left(1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 4{,}92 \cdot (1 + 0{,}09 \cdot 2{,}5) \cdot 2{,}66 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = 7{,}28\ mm \\ a_{II,\infty} = 16{,}03\ mm \end{cases}$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = M_A + \frac{p_{qp} \cdot L^2}{8} = -66 + \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} = 132{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

$$t = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_{qp}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{46{,}8}{132}\right)^2 = 0{,}874$$

$$t = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_{qp}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{46{,}8}{132}\right)^2 = 0{,}937$$

- Flecha estimada (eq. 2.17):

$$a = (1 - \zeta) \cdot a_I + \zeta \cdot a_{II}$$

$$t = 0 \Longrightarrow a_0 = (1 - 0{,}874) \cdot 2{,}45 + 0{,}874 \cdot 13{,}09 \cong 11{,}7\ mm$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = (1 - 0{,}937) \cdot 7{,}28 + 0{,}937 \cdot 16{,}03 \cong 15{,}5\ mm$$

Método dos coeficientes globais:

Para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5$

$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$

$\alpha \cdot \rho_m =\cong 0{,}03$ (calculado anteriormente)

$\frac{\rho'_m}{\rho_m} \cong 0{,}6$ (calculado anteriormente)

com M_{cr} e M_{qp} calculados para a secção determinante (½ vão), vem:

$\frac{M_{cr}}{M_{qp}} = \frac{46{,}8}{132} \cong 0{,}35$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 2{,}66\ mm$$

- Coeficientes de correção, k_t e k'_s:

através dos ábacos expostos no anexo A3, vem que:

$$k_t = 5{,}90;\ k'_s \cong 0{,}92$$

- Flecha estimada a longo prazo (eq. 3.7):

$$a = k_t \cdot k'_s \cdot a_c$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = 5{,}90 \cdot 0{,}92 \cdot 2{,}66 \cong 14{,}4\ mm$$

Método Model Code CEB-FIP 1990:

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 2{,}66\ mm$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = M_A + \frac{p_{qp} \cdot L^2}{8} = -66 + \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} = 132{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

Como $M_{qp} \geq M_{cr}$, então vem pela equação (3.11) que a flecha estimada a longo prazo é dada por:

$$a_\infty = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot \eta_\varphi \cdot (1 - 20 \cdot \rho'_m) \cdot a_c$$

para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5 \Longrightarrow \eta_\varphi = 1{,}0$

$\rho'_m \cong 0{,}0029\ (\cong 0{,}29\%)$ (calculado anteriormente)

$\rho_m \cong 0{,}0051\ (\cong 0{,}51\ \%)$ (calculado anteriormente)

$\eta \cong 4{,}0$ (tabela 3.1)

vem que:

$$a_\infty = \left(\frac{0{,}60}{0{,}55}\right)^3 \cdot 4{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot (1 - 20 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-3}) \cdot 2{,}66 \cdot 10^{-3} = 13{,}0 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 13{,}0\ mm$$

Método das secções determinantes:

Neste caso a secção determinante a considerar é a secção de 1/2 vão, onde o momento positivo é máximo. O valor de cálculo da flecha será o obtido considerando as características da secção determinante. O valor de cálculo da flecha será o obtido considerando as características da secção determinante.

Pelas equações (3.22 e 3.23), vem que as flechas, instantânea e a longo prazo, são dadas por:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_\mathrm{m}} \cdot a_c$$

$$a_\infty = (1 + \varphi) \cdot \frac{I_c}{I_m} \cdot a_c$$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 2{,}66\ \ mm$$

- Momento fletor na secção determinante, M_{qp}:

<u>Secção determinante – 1/2 vão:</u>

$M_{qp} = M_A + \frac{p_{qp} \cdot L^2}{8} = -66{,}0 + \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} = 132{,}0\ kNm.$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}6^3}{12}}{0{,}30} \cdot 2{,}6 \cdot 10^3 \Longrightarrow M_{cr} \cong 46{,}8\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

<u>Secção determinante - 1/2 vão:</u>

$$\mathrm{t} = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{46{,}8}{132{,}0}\right)^2 = 0{,}874$$

$$\mathrm{t} = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{46{,}8}{132{,}0}\right)^2 = 0{,}937$$

- Momentos de inércia na secção determinante (§ 2.3.4):

<u>Secção determinante – 1/2 vão:</u>

$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}60^3}{12} = 0{,}00540\ m^4$$

Para $t = 0$:

$$\begin{cases} I_{I,0} = 0{,}00596\ m^4 \\ I_{II,0} = 0{,}00138\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,0} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}00596 \cdot 0{,}00138}{(1-0{,}874) \cdot 0{,}00138 + 0{,}874 \cdot 0{,}00596} = 0{,}00153\ m^4$$

Para $t = \infty$:

$$\begin{cases} I_{I,\infty} = 0{,}00733\ m^4 \\ I_{II,\infty} = 0{,}00378\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,\infty} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}00733 \cdot 0{,}00378}{(1-0{,}937) \cdot 0{,}00378 + 0{,}937 \cdot 0{,}00733} = 0{,}00390\ m^4$$

- Flecha estimada:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_{m,0}} \cdot a_c = \frac{0{,}00540}{0{,}00153} \cdot 2{,}66 \cdot 10^{-3} = 9{,}4 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_0 = 9{,}4\ mm$$

$$a_\infty = (1+\varphi) \cdot \frac{I_c}{I_{m,\infty}} \cdot a_c = (1+2{,}5) \cdot \frac{0{,}00540}{0{,}00390} \cdot 2{,}66 \cdot 10^{-3} = 12{,}9 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 12{,}9\ mm$$

<u>Caso D</u> (secção em T):

Seja a viga de betão armado encastrada - encastrada representada na figura 4.6.

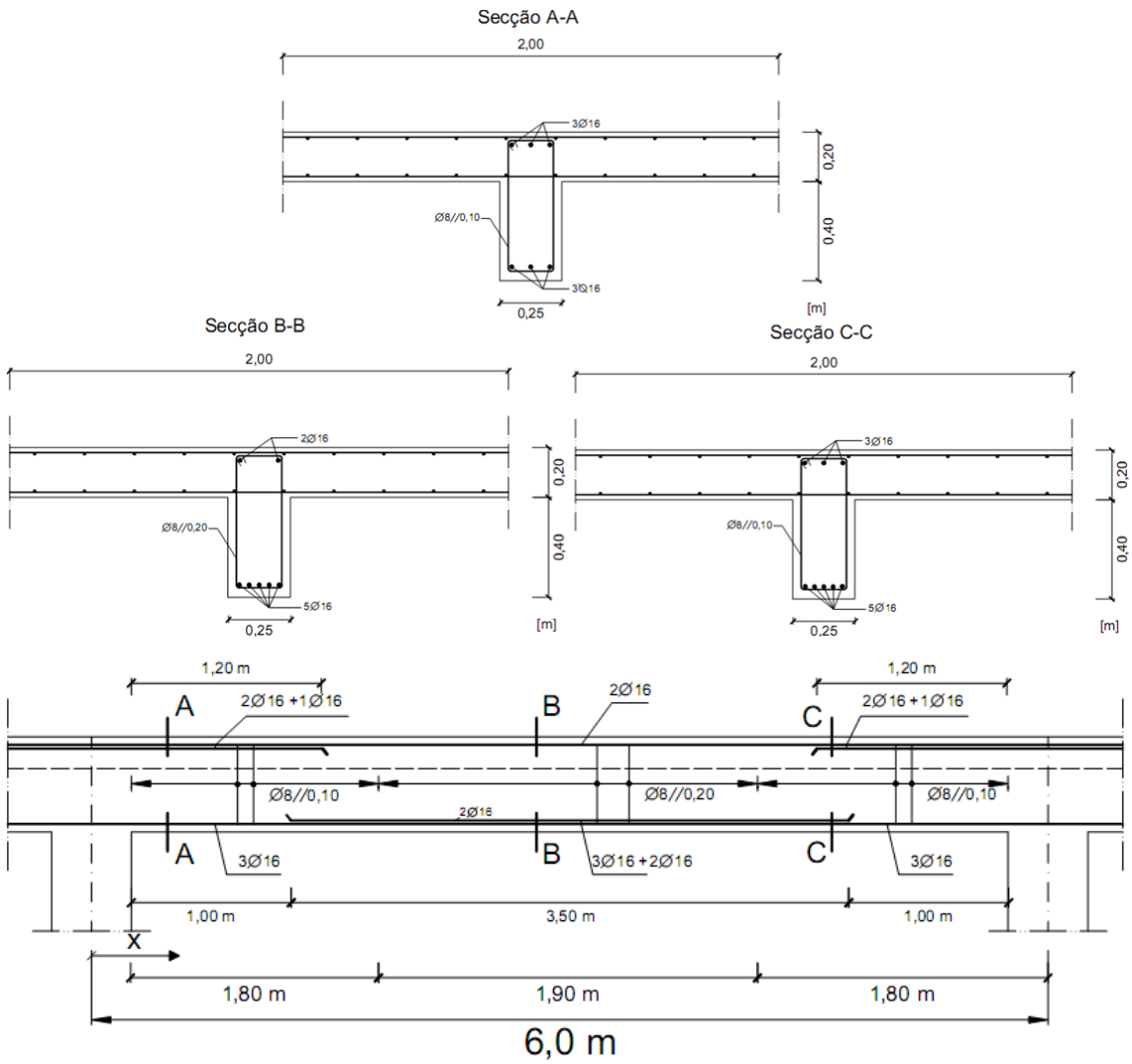


Fig. 4.6 – Pormenorização da armaduras (Caso D – secção em T)

As principais características dos materiais são as seguintes:

- Betão C25/30; E_{cm} = 31 GPa; f_{ctm} = 2,6 MPa; f=2,5; c = 0,8
- Aço A500NR; E_s = 200 GPa
-

Método de integração numérica:

O cálculo da flecha segundo o método de integração numérica foi realizado recorrendo ao programa Microsoft Office Excel 2007. O anexo A4.6 mostra a tabela com os valores do cálculo da flecha segundo este método.

Para $t = 0$:

$$a_0 = 6{,}4\ mm$$

Para $t = \infty$:

$$a_\infty = 8{,}8\ mm$$

Método bilinear:

- Flecha elástica:

  A flecha elástica neste caso será igual à soma da flecha elástica da viga bi-encastrada do caso C com a flecha elástica, da viga do problema, resultante da aplicação de um momento positivo, de 66 kNm, nos apoios. Vem então, com base no anexo A1, que:

$$a_c = \left[\frac{1}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{(EI)_c}\right] + 2 \cdot \left[\frac{1}{16} \cdot \frac{M \cdot L^2}{(EI)_c}\right]$$

$$a_c = \left[\frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^4}{384 \cdot 31{,}0 \cdot 10^6 \cdot 0{,}00987}\right] + 2 \cdot \left[\frac{66 \cdot 6^2}{16 \cdot 31{,}0 \cdot 10^6 \cdot 0{,}00987}\right]$$

$$a_c \cong 0{,}49 + 0{,}97 \Longrightarrow a_c \cong 1{,}46\ mm$$

- Percentagem média de armadura de tração, ρ_m, e compressão, ρ'_m:

  Recorrendo às equações (3.6 e 3.17),vem:

$$\rho_m = \rho_a \cdot \frac{L_a}{L} + \rho_0 \cdot \frac{\mathrm{L}_0}{L} + \rho_b \cdot \frac{\mathrm{L}_b}{L}$$

$$\rho_m \cong \frac{\mathrm{A_{s,apoio\ A}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}21 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{A_{s,vão}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}58 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{A_{s,apoio\ B}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}21 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} =$$

$$= 0{,}21 \cdot \frac{6{,}03 \cdot 10^{-4}}{2{,}00 \cdot 0{,}55} + 0{,}58 \cdot \frac{10{,}05 \cdot 10^{-4}}{0{,}25 \cdot 0{,}55} + 0{,}21 \cdot \frac{6{,}03 \cdot 10^{-4}}{2{,}00 \cdot 0{,}55}$$

$$\Longrightarrow \rho_m \cong 0{,}0045\ (0{,}45\%)$$

  De forma análoga para a armadura de compressão, vem:

$$\rho'_m \cong 0{,}0021\ (0{,}21\%)$$

- Coeficientes *k*:

  Para os parâmetros:

$$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$$

$$\frac{d'}{h} = \frac{0{,}05}{0{,}60} \cong 0{,}08$$

$$\alpha \cdot \rho_m = \frac{200}{31} \cdot 0{,}0045 \cong 0{,}03$$

$$\frac{\rho'_m}{\rho_m} = \frac{0{,}0021}{0{,}0045} \cong 0{,}50$$

$$\chi \cdot \varphi = 0{,}8 \cdot 2{,}5 = 2{,}0$$

  os coeficientes de correção podem ser obtidos através dos ábacos expostos no anexo A2. Mediante algumas interpolações, vem que:

$$k_{s1} \cong 0{,}92;\ k_{\varphi 1} \cong 0{,}80;\ k_{s2} \cong 4{,}92;\ k_{\varphi 2} \cong 0{,}09$$

- Flecha em estado I e II:

  vem pelas equações (3.4 e 3.5), que:

$$t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,0} = k_{s1} \cdot a_c = 0{,}92 \cdot 1{,}46 = 1{,}34\ mm \\ a_{II,0} = k_{s2} \cdot a_c = 4{,}92 \cdot 1{,}46 = 7{,}18\ mm \end{cases}$$

$$t = \infty \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = k_{s1} \cdot \left(1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 0{,}92 \cdot (1 + 0{,}80 \cdot 2{,}5) \cdot 1{,}46 \\ a_{II,\infty} = k_{s2} \cdot \left(1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 4{,}92 \cdot (1 + 0{,}09 \cdot 2{,}5) \cdot 1{,}46 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = 4{,}03\ mm \\ a_{II,\infty} = 8{,}80\ mm \end{cases}$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = M_A + \frac{p_{qp} \cdot L^2}{8} = -66 + \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} = 132{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} \cong 58{,}3\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

$$t = 0 \Rightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_{qp}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{58{,}3}{132}\right)^2 = 0{,}805$$

$$t = \infty \Rightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_{qp}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{58{,}3}{132}\right)^2 = 0{,}902$$

- Flecha estimada (eq. 2.17):

$$a = (1 - \zeta) \cdot a_I + \zeta \cdot a_{II}$$

$$t = 0 \Rightarrow a_0 = (1 - 0{,}805) \cdot 1{,}34 + 0{,}805 \cdot 7{,}18 \cong 6{,}0\ mm$$

$$t = \infty \Rightarrow a_\infty = (1 - 0{,}902) \cdot 4{,}03 + 0{,}902 \cdot 8{,}80 \cong 8{,}3\ mm$$

Método dos coeficientes globais:

Para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5$

$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$

$\alpha \cdot \rho_m = \cong 0{,}03$ (calculado anteriormente)

$\frac{\rho'_m}{\rho_m} \cong 0{,}5$ (calculado anteriormente)

com M_{cr} e M_{qp} calculados para a secção determinante (½ vão), vem:

$\frac{M_{cr}}{M_{qp}} = \frac{58{,}3}{132} \cong 0{,}44$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 1{,}46\ mm$$

- Coeficientes de correção, k_t e k'_s:

através dos ábacos expostos no anexo A3, vem que:

$$k_t = 5{,}90\ ;\ k'_s \cong 0{,}94$$

- Flecha estimada a longo prazo (eq. 3.7):

$$a = k_t \cdot k'_s \cdot a_c$$

$$t = \infty \Rightarrow a_\infty = 5{,}90 \cdot 0{,}94 \cdot 1{,}46 \cong 8{,}1\ mm$$

Método Model Code CEB-FIP 1990:

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 1{,}46\ mm$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = M_A + \frac{p_{qp} \cdot L^2}{8} = -66 + \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} = 132{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} \cong 58{,}3\ kNm$$

Como $M_{qp} \geq M_{cr}$, então vem pela equação (3.11) que a flecha estimada a longo prazo é dada por:

$$a_\infty = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot \eta_\varphi \cdot (1 - 20 \cdot \rho'_m) \cdot a_c$$

para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5 \Longrightarrow \eta_\varphi = 1{,}0$

$\rho'_m \cong 0{,}0021\ (\cong 0{,}21\%)$ (calculado anteriormente)

$\rho_m \cong 0{,}0045\ (\cong 0{,}45\ \%)$ (calculado anteriormente)

$\eta \cong 4{,}5$ (tabela 3.1)

vem que:

$$a_\infty = \left(\frac{0{,}60}{0{,}55}\right)^3 \cdot 4{,}5 \cdot 1{,}0 \cdot (1 - 20 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot 1{,}46 \cdot 10^{-3} = 8{,}2 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 8{,}2\ mm$$

Método das secções determinantes:

Neste caso a secção determinante a considerar é a secção de 1/2 vão, onde o momento positivo é máximo. O valor de cálculo da flecha é obtido considerando as características da secção determinante.

Pelas equações (3.22 e 3.23), vem que as flechas, instantânea e a longo prazo:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_\mathrm{m}} \cdot a_c$$

$$a_\infty = (1 + \varphi) \cdot \frac{I_c}{I_m} \cdot a_c$$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 1{,}46\ \ mm$$

- Momento fletor na secção determinante, M_{qp}:

<u>Secção determinante – 1/2 vão:</u>

$$M_{qp} = M_A + \frac{p_{qp} \cdot L^2}{8} = -66{,}0 + \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} = 132{,}0\ kNm.$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} \cong 58{,}3\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

  <u>Secção determinante - 1/2 vão:</u>

$$t = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_{qp}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{58{,}3}{132{,}0}\right)^2 = 0{,}805$$

$$t = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_{qp}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{58{,}3}{132{,}0}\right)^2 = 0{,}902$$

- Momentos de inércia na secção determinante (§ 2.3.4):

  <u>Secção determinante – 1/2 vão:</u>

$$I_c = 0{,}00987\ m^4$$

  Para $t = 0$:

$$\begin{cases} I_{I,0} = 0{,}01087\ m^4 \\ I_{II,0} = 0{,}00170\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,0} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}01087 \cdot 0{,}00170}{(1-0{,}805) \cdot 0{,}00170 + 0{,}805 \cdot 0{,}01087} = 0{,}00203\ m^4$$

  Para $t = \infty$:

$$\begin{cases} I_{I,\infty} = 0{,}01331\ m^4 \\ I_{II,\infty} = 0{,}00528\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,\infty} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}01331 \cdot 0{,}00528}{(1-0{,}902) \cdot 0{,}00528 + 0{,}902 \cdot 0{,}01331} = 0{,}00561\ m^4$$

- Flecha estimada:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_{m,0}} \cdot a_c = \frac{0{,}00987}{0{,}00203} \cdot 1{,}46 \cdot 10^{-3} = 7{,}1 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_0 = 7{,}1\ mm$$

$$a_\infty = (1+\varphi) \cdot \frac{I_c}{I_{m,\infty}} \cdot a_c = (1+2{,}5) \cdot \frac{0{,}00987}{0{,}00561} \cdot 1{,}46 \cdot 10^{-3} = 9{,}0 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 9{,}0\ mm$$

<u>Caso D</u> (secção em I):

Seja a viga de betão armado encastrada - encastrada representada na figura 4.7.

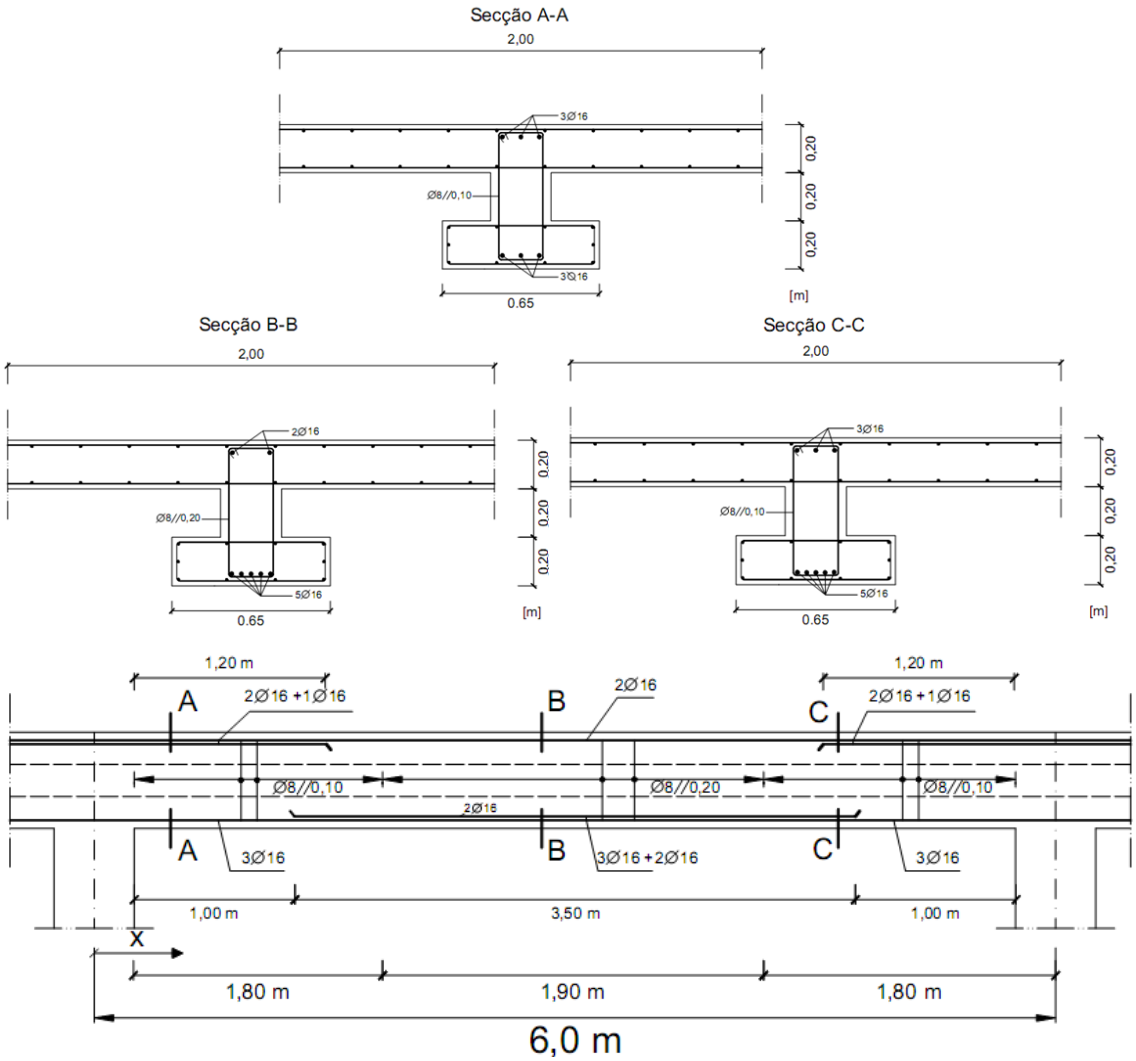


Fig. 4.7 – Pormenorização da armaduras (Caso D – secção em I)

As principais características dos materiais são as seguintes:

- Betão C25/30; E_{cm} = 31 GPa; f_{ctm} = 2,6 MPa; f=2,5; c = 0,8
- Aço A500NR; E_s = 200 GPa

Método de integração numérica:

O cálculo da flecha segundo o método de integração numérica foi realizado recorrendo ao programa Microsoft Office Excel 2007. O anexo A4.7 mostra a tabela com os valores do cálculo da flecha segundo este método.

Para $t = 0$:

$$a_0 = 1{,}4\ mm$$

Para $t = \infty$:

$$a_\infty = 5{,}0\ mm$$

Método bilinear:

- Flecha elástica:

  A flecha elástica neste caso será igual à soma da flecha elástica da viga bi-encastrada do caso C com a flecha elástica, da viga do problema, resultante da aplicação de um momento positivo, de 66 kNm, nos apoios. Vem então, com base no anexo A1, que:

$$a_c = \left[\frac{1}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{(EI)_c}\right] + 2 \cdot \left[\frac{1}{16} \cdot \frac{M \cdot L^2}{(EI)_c}\right]$$

$$a_c = \left[\frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^4}{384 \cdot 31{,}0 \cdot 10^6 \cdot 0{,}01811}\right] + 2 \cdot \left[\frac{66 \cdot 6^2}{16 \cdot 31{,}0 \cdot 10^6 \cdot 0{,}01811}\right]$$

$$a_c \cong 0{,}27 + 0{,}53 \Longrightarrow a_c \cong 0{,}80\ mm$$

- Percentagem média de armadura de tração, ρ_m, e compressão, ρ'_m:

  Recorrendo às equações (3.6 e 3.17),vem:

$$\rho_m = \rho_a \cdot \frac{L_a}{L} + \rho_0 \cdot \frac{\mathrm{L}_0}{L} + \rho_b \cdot \frac{\mathrm{L}_b}{L}$$

$$\rho_m \cong \frac{\mathrm{A_{s,apoio\ A}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}21 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{A_{s,vão}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}58 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{A_{s,apoio\ B}}}{\mathrm{b \cdot d}} \cdot \frac{0{,}21 \cdot \mathrm{L}}{\mathrm{L}} =$$

$$= 0{,}21 \cdot \frac{6{,}03 \cdot 10^{-4}}{2{,}00 \cdot 0{,}55} + 0{,}58 \cdot \frac{10{,}05 \cdot 10^{-4}}{0{,}65 \cdot 0{,}55} + 0{,}21 \cdot \frac{6{,}03 \cdot 10^{-4}}{2{,}00 \cdot 0{,}55}$$

$$\Longrightarrow \rho_m \cong 0{,}0019\ (0{,}19\%)$$

  De forma análoga para a armadura de compressão, vem:

$$\rho'_m \cong 0{,}0009\ (0{,}09\%)$$

- Coeficientes *k*:

  Para os parâmetros:

$$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$$

$$\frac{d'}{h} = \frac{0{,}05}{0{,}60} \cong 0{,}08$$

$$\alpha \cdot \rho_m = \frac{200}{31} \cdot 0{,}0019 \cong 0{,}0125$$

$$\frac{\rho'_m}{\rho_m} = \frac{0{,}009}{0{,}0019} \cong 0{,}50$$

$$\chi \cdot \varphi = 0{,}8 \cdot 2{,}5 = 2{,}0$$

  os coeficientes de correção podem ser obtidos através dos ábacos expostos no anexo A2. Mediante algumas interpolações, vem que:

$$k_{s1} \cong 0{,}97;\ k_{\varphi 1} \cong 0{,}91;\ k_{s2} \cong 11{,}30;\ k_{\varphi 2} \cong 0{,}07$$

- Flecha em estado I e II:

  vem pelas equações (3.4 e 3.5), que:

$$t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,0} = k_{s1} \cdot a_c = 0{,}97 \cdot 0{,}80 = 0{,}78\ mm \\ a_{II,0} = k_{s2} \cdot a_c = 11{,}30 \cdot 0{,}80 = 9{,}04\ mm \end{cases}$$

$$t = \infty \Longrightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = k_{s1} \cdot \left(1 + k_{\varphi 1} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 0{,}97 \cdot (1 + 0{,}91 \cdot 2{,}5) \cdot 0{,}80 \\ a_{II,\infty} = k_{s2} \cdot \left(1 + k_{\varphi 2} \cdot \varphi\right) \cdot a_c = 11{,}30 \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 2{,}5) \cdot 0{,}80 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{I,\infty} = 2{,}54\ mm \\ a_{II,\infty} = 10{,}62\ mm \end{cases}$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = M_A + \frac{p_{qp} \cdot L^2}{8} = -66 + \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} = 132{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} \cong 119{,}75\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

$$t = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_{qp}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{119{,}75}{132}\right)^2 = 0{,}177$$

$$t = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_{qp}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{119{,}75}{132}\right)^2 = 0{,}588$$

- Flecha estimada (eq. 2.17):

$$a = (1 - \zeta) \cdot a_I + \zeta \cdot a_{II}$$

$$t = 0 \Longrightarrow a_0 = (1 - 0{,}177) \cdot 0{,}78 + 0{,}177 \cdot 9{,}04 \cong 2{,}2\ mm$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = (1 - 0{,}588) \cdot 2{,}54 + 0{,}588 \cdot 10{,}62 \cong 7{,}3\ mm$$

Método dos coeficientes globais:

Para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5$

$\frac{d}{h} = \frac{0{,}55}{0{,}60} \cong 0{,}92$

$\alpha \cdot \rho_m =\cong 0{,}0125$ (calculado anteriormente)

$\frac{\rho'_m}{\rho_m} \cong 0{,}5$ (calculado anteriormente)

com M_{cr} e M_{qp} calculados para a secção determinante (½ vão), vem:

$\frac{M_{cr}}{M_{qp}} = \frac{119{,}75}{132} \cong 0{,}91$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 0{,}80\ mm$$

- Coeficientes de correção, k_t e k'_s:

através dos ábacos expostos no anexo A3, vem que:

$$k_t = 8{,}80\ ;\ k'_s \cong 0{,}96$$

- Flecha estimada a longo prazo (eq. 3.7):

$$a = k_t \cdot k'_s \cdot a_c$$

$$t = \infty \Longrightarrow a_\infty = 8{,}80 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}80 \cong 6{,}8\ mm$$

Método Model Code CEB-FIP 1990:

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 0{,}80\ mm$$

- Momento fletor na secção determinante (1/2 vão):

$$M_{qp} = M_A + \frac{p_{qp} \cdot L^2}{8} = -66 + \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} = 132{,}0\ kNm$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} \cong 119{,}75\ kNm$$

Como $M_{qp} \geq M_{cr}$, então vem pela equação (3.11) que a flecha estimada a longo prazo é dada por:

$$a_\infty = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot \eta_\varphi \cdot (1 - 20 \cdot \rho'_m) \cdot a_c$$

para os parâmetros:

$\varphi = 2{,}5 \Longrightarrow \eta_\varphi = 1{,}0$

$\rho'_m \cong 0{,}0009\ (\cong 0{,}09\%)$ (calculado anteriormente)

$\rho_m \cong 0{,}0019\ (\cong 0{,}19\ \%)$ (calculado anteriormente)

$\eta \cong 8{,}4$ (tabela 3.1)

vem que:

$$a_\infty = \left(\frac{0{,}60}{0{,}55}\right)^3 \cdot 8{,}4 \cdot 1{,}0 \cdot (1 - 20 \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-3}) \cdot 0{,}80 \cdot 10^{-3} = 8{,}6 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 8{,}6\ mm$$

Método das secções determinantes:

Neste caso a secção determinante a considerar é a secção de 1/2 vão, onde o momento positivo é máximo. O valor de cálculo da flecha será o obtido considerando as características da secção determinante. O valor de cálculo da flecha será o obtido considerando as características da secção determinante.

Pelas equações (3.22 e 3.23), vem que as flechas, instantânea e a longo prazo:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_\mathrm{m}} \cdot a_c$$

$$a_\infty = (1 + \varphi) \cdot \frac{I_c}{I_m} \cdot a_c$$

- Flecha elástica (calculada anteriormente):

$$a_c = 0{,}80\ \ mm$$

- Momento fletor na secção determinante, M_{qp}:

<u>Secção determinante – 1/2 vão:</u>

$$M_{qp} = M_A + \frac{p_{qp} \cdot L^2}{8} = -66{,}0 + \frac{44{,}0 \cdot 6{,}0^2}{8} = 132{,}0\ kNm.$$

- Momento de fendilhação, M_{cr}:

$$M_{cr} \cong W_c \cdot f_{ctm} \cong 119{,}75\ kNm$$

- Coeficiente de distribuição, ζ:

  <u>Secção determinante - 1/2 vão:</u>

$$\mathrm{t} = 0 \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 1{,}0 \cdot \left(\frac{119{,}75}{132{,}0}\right)^2 = 0{,}177$$

$$\mathrm{t} = \infty \Longrightarrow \zeta = 1 - \beta \cdot \left(\frac{\mathrm{M_{cr}}}{\mathrm{M_{qp}}}\right)^2 = 1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{119{,}75}{132{,}0}\right)^2 = 0{,}588$$

- Momentos de inércia na secção determinante (§ 2.3.4):

  <u>Secção determinante – 1/2 vão:</u>

$$I_c = 0{,}01811\ m^4$$

  Para $t = 0$:

$$\begin{cases} I_{I,0} = 0{,}01893\ m^4 \\ I_{II,0} = 0{,}00170\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,0} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}01893 \cdot 0{,}00170}{(1-0{,}177) \cdot 0{,}00170 + 0{,}177 \cdot 0{,}01893} = 0{,}00677\ m^4$$

  Para $t = \infty$:

$$\begin{cases} I_{I,\infty} = 0{,}02093\ m^4 \\ I_{II,\infty} = 0{,}00528\ m^4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_{m,\infty} = \frac{I_I \cdot I_{II}}{(1-\zeta) \cdot I_{II} + \zeta \cdot I_I} = \frac{0{,}02093 \cdot 0{,}00528}{(1-0{,}588) \cdot 0{,}00528 + 0{,}588 \cdot 0{,}02093} = 0{,}00763\ m^4$$

- Flecha estimada:

$$a_0 = \frac{I_c}{I_{m,0}} \cdot a_c = \frac{0{,}01811}{0{,}00677} \cdot 0{,}80 \cdot 10^{-3} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_0 = 2{,}1\ mm$$

$$a_\infty = (1+\varphi) \cdot \frac{I_c}{I_{m,\infty}} \cdot a_c = (1+2{,}5) \cdot \frac{0{,}01811}{0{,}00763} \cdot 0{,}80 \cdot 10^{-3} = 6{,}6 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\Longrightarrow a_\infty = 6{,}6\ mm$$

4.5. Comparação de resultados:

Segue em baixo um quadro resumo com os resultados obtidos nos exemplos de aplicação e os respetivos erros. O erro relativo é calculado em relação aos valores obtidos no cálculo de integração numérica.

Caso de estudo	Tipo de secção	Método	a_c (mm)	a_0 (mm)	Erro a_0	a_∞ (mm)	Erro a_∞
A	Retangular	Integração numérica	4,4	11,6	--	16.6	--
		Bilinear		12,0	3,4 %	17,2	3,6 %
		Coeficientes globais		--	--	16,7	0,6 %
		MC 90		--	--	14,4	– 13,3 %
		Secção determinante		11,6	0,0 %	16,4	– 1,2 %
B	Retangular	Integração numérica	1,8	5,5	--	8,1	--
		Bilinear		4,6	– 16,4 %	6,7	– 17,3 %
		Coeficientes globais		--	--	7,1	– 12,3 %
		MC 90		--	--	7,1	– 12,3 %
		Secção determinante		6,1	10.9 %	8,4	3.7 %
C	Retangular	Integração numérica	0,9	2,4	--	4,9	--
		Bilinear		2,6	8,3 %	4,9	0,0 %
		Coeficientes globais		--	--	4,6	– 6,1 %
		MC 90		--	--	4,7	– 4,1 %
		Secção determinante		3,1	29,2 %	5,5	12,2 %
C	T	Integração numérica	0,5	0,90	--	2,3	--
		Bilinear		1,3	44,4 %	3,6	56,5 %
		Coeficientes globais		--	--	3,3	43,5 %
		MC 90		--	--	2,2	– 4,3 %
		Secção determinante		1,4	55,6 %	3,6	56,5 %
D	Retangular	Integração numérica	2,7	9,0	--	12,9	--
		Bilinear		11,7	30,0 %	15,5	20,2 %
		Coeficientes globais		--	--	14,4	11,6 %
		MC 90		--	--	13,0	0,8 %
		Secção determinante		9,4	4,4 %	12,9	0,0 %

Tabela 4.2 – Resultados dos exemplos de aplicação

Caso de estudo	Tipo de secção	Método	a_c (mm)	a_0 (mm)	Erro a_0	a_∞ (mm)	Erro a_∞
D	T	Integração numérica	1,5	6,4	--	8,8	--
		Bilinear		6,0	– 6,3 %	8,3	– 5,7 %
		Coeficientes globais		--	--	8,1	– 8,0 %
		MC 90		--	--	8,2	– 6,8 %
		Secção determinante		7,1	10,9 %	9,0	2,3 %
D	I	Integração numérica	0,8	1,4	--	5,0	--
		Bilinear		2,2	57,1 %	7,3	46,0 %
		Coeficientes globais		--	--	6,8	36,0 %
		MC 90		--	--	8,6	72,0 %
		Secção determinante		2,1	50,0 %	6,6	32,0 %

Tabela 4.2 – Resultados dos exemplos de aplicação (continuação)

Pela analise da tabela 4.2 vem que:

- Regra geral os métodos simplificados aproximam melhor a flecha a longo prazo do que a flecha instantânea;

- Os métodos simplificados apresentam boas aproximações ao valor da flecha, quando estudados para a secção retangular, enquanto no caso de secções em T e em I apresentam por vezes erros grandes. Isto deve-se em grande parte ao facto de os ábacos usados para obter o valor dos diversos coeficientes usados nos métodos simplificados estarem concebidos para secções retangulares, pelo que, teve-se que fazer algumas simplificações, para estudar as secções em T e em I como secções retangulares e assim obter os valores dos coeficientes usados no cálculo da flecha para os diferentes métodos simplificados;

- Como conclusão final, admite-se que os métodos simplificados oferecem uma boa aproximação da flecha a longo prazo para vigas de secção retangular. No caso de vigas de secção em T e em I, neste estudo, não se pode tirar muitas conclusões acerca da aplicação dos métodos simplificados, uma vez que os resultados obtidos são pouco consistentes. Ainda assim, o erro absoluto máximo do MSD é apenas de 1,6 mm (caso D para a secção em I) para a deformação a longo prazo.

- Com exceção do MSD, os métodos simplificados dão frequentemente erros contra a segurança (flechas menores do que as obtidas pelo MIN);

- Constata-se que os erros relativos dos métodos simplificados são maiores quanto maior é a relação M_{cr}/M, isto é, quanto mais próximo da fendilhação está o momento quase-permanente (caso C para secção em T e caso D para secção em I);

- Verifica-se também que apesar de nesses casos o erro relativo ser elevado, como as deformações são pequenas, o erro absoluto é reduzido;

Capítulo 5

Estudo paramétrico

Neste capítulo é feita uma análise pormenorizada do efeito que alguns parâmetros têm no cálculo da deformação. O estudo baseia-se nos quatro casos usados no capítulo anterior e resumidos na tabela 4.1.

Neste estudo considerou-se vigas em betão armado de secção retangular ($0{,}3 \times 0{,}6\ m^2$).

Nota para o facto de na secção 5.4 a armadura de compressão ser variável e diferente da exposta na tabela 4.1, uma vez que nessa secção se fará um estudo da influência que a armadura de compressão tem na deformação. Nesse estudo será indicado somente a relação entre a armadura de compressão e de tração, sendo esta última igual aos valores apresentados na tabela 4.1. Da mesma forma na secção 5.1 estudar-se-ão os casos A,B, C e D para três diferentes tipos de betão: C12/15, C25/30 e C40/50.

5.1. Influência da resistência à tração do betão

Nesta secção é apresentado um estudo sobre a influência da resistência à tração do betão / classe do betão, sobre a deformação. Nos resultados apresentados admitiu-se um coeficiente de fluência, $\varphi = 2{,}5$, e desprezou-se a contribuição da deformação devido à retração.

A figura 5.1 mostra a relação carga-flecha a longo prazo para os quatro casos de estudo (A, B, C e D) expostos na tabela 4.1 e para três diferentes valores de resistência média à tração do betão: 1.6, 2.6 e 3.5 MPa, que correspondem, respetivamente, a betões de classe: C12/15, C25/30 e C40/50.

Pela análise da figura 5.1 observa-se, como era esperado, que quanto menor o valor de f_{ctm}, logo menor a qualidade do betão, após o início da fendilhação, maior será a deformação para vigas sob condições de apoio e carregamento idênticas.

Quanto maior for valor de f_{ctm} maior será a carga de fendilhação, ou seja, a estrutura fendilha mais tarde. Uma vez atingida a fase de estabilização de fendas o declive do traçado carga-deformação é aproximadamente igual para o vários valores de f_{ctm}.

Exemplificando com o caso A, para a deformação a longo prazo, vem que para o carregamento $p_{qp} = 25\ kN/m$, para um aumento de f_{ctm} de 60% (de 1,6 para 2.6 MPa) regista-se uma diminuição da deformação em cerca de 9% e esta diferença tende a diminuir, sendo de 5% quando $p_{qp} = 60\ kNm$. De forma análoga para um aumento de f_{ctm} de 35% (de 2,6 para 3,5 MPa) regista-se uma diminuição de 8% para $p_{qp} = 25\ kNm$ e quando $p_{qp} = 60\ kNm$ esse valor baixa para 5%.

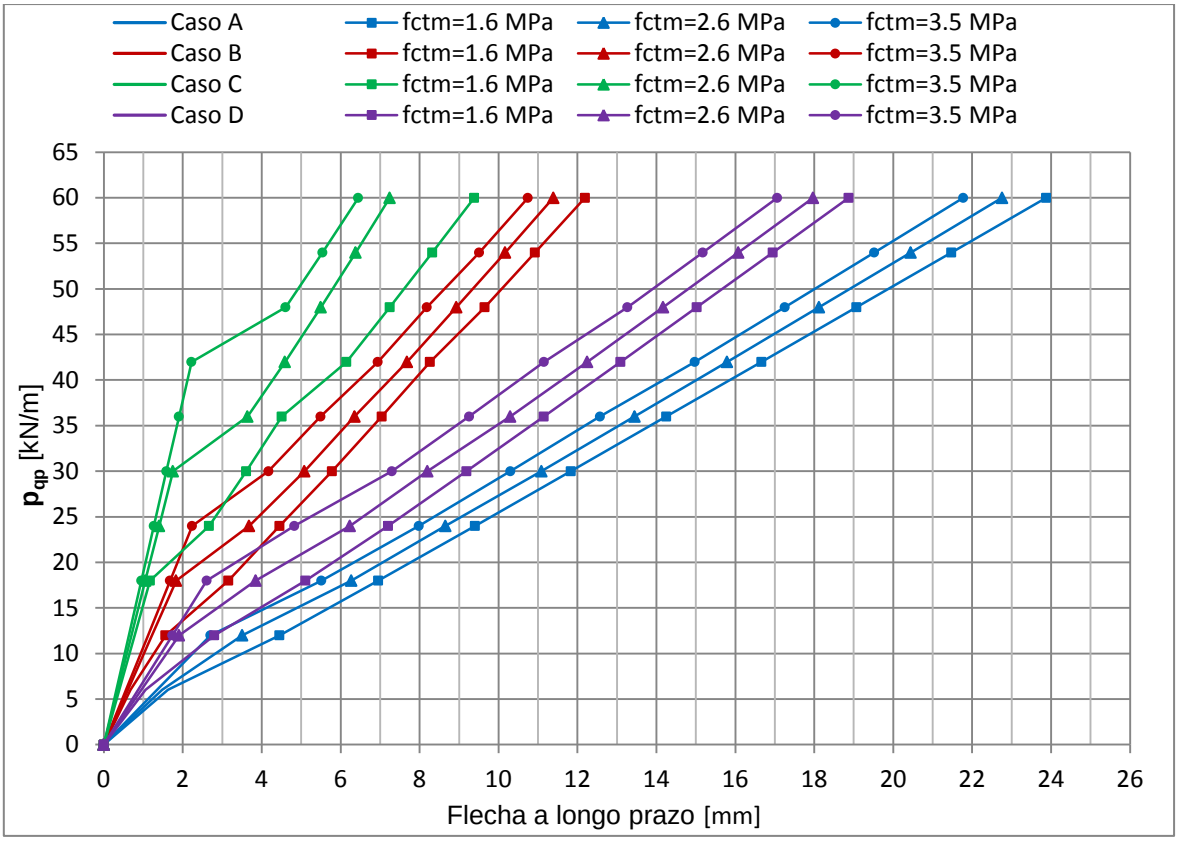


Fig. 5.1 – Influência de f_{ctm} sobre a deformação

5.2. Influência do coeficiente de fluência

Nesta secção é apresentado um estudo sobre a influência do efeito da fluência na deformação. Apresenta-se em seguida o diagrama coeficiente de fluência – flecha, para cada caso de estudo.

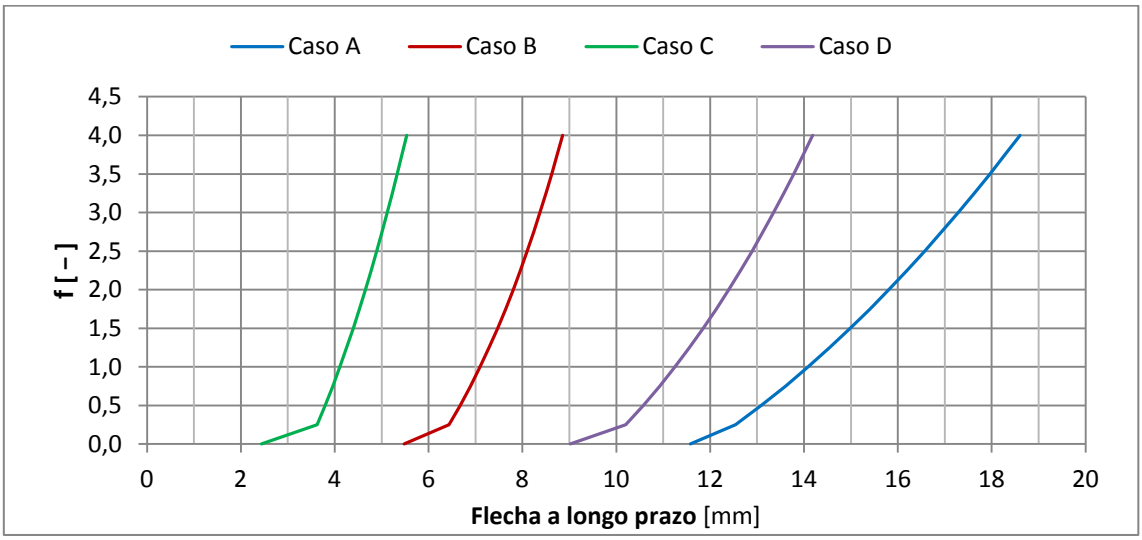


Fig. 5.2 – Diagrama coeficiente de fluência – flecha (secção retangular)

Da análise da figura 5.2, observa-se que a deformação a longo prazo tem uma variação aproximadamente linear, à medida que se varia o coeficiente de fluência.

Nos casos em análise, constata-se que para valores correntes do coeficiente de fluência, $\varphi \cong 2{,}5$, a fluência é responsável por cerca de 30% da flecha total, nos casos A, B e D e de 50 % no caso C, valores que mostram a importância que o efeito da fluência tem na deformação.

A influência da fluência na deformação é tanto maior quanto menor for o carregamento a que a viga está sujeita.

5.3. Influência da retração

Nesta secção é feito um estudo da influência da retração na deformação, para os diferentes casos expostos na tabela 4.1. No cálculo admitiu-se um coeficiente de fluência, $\varphi = 2{,}5$.

A figura 5.3 mostra a relação extensão total de retração – flecha, para os diferentes casos.

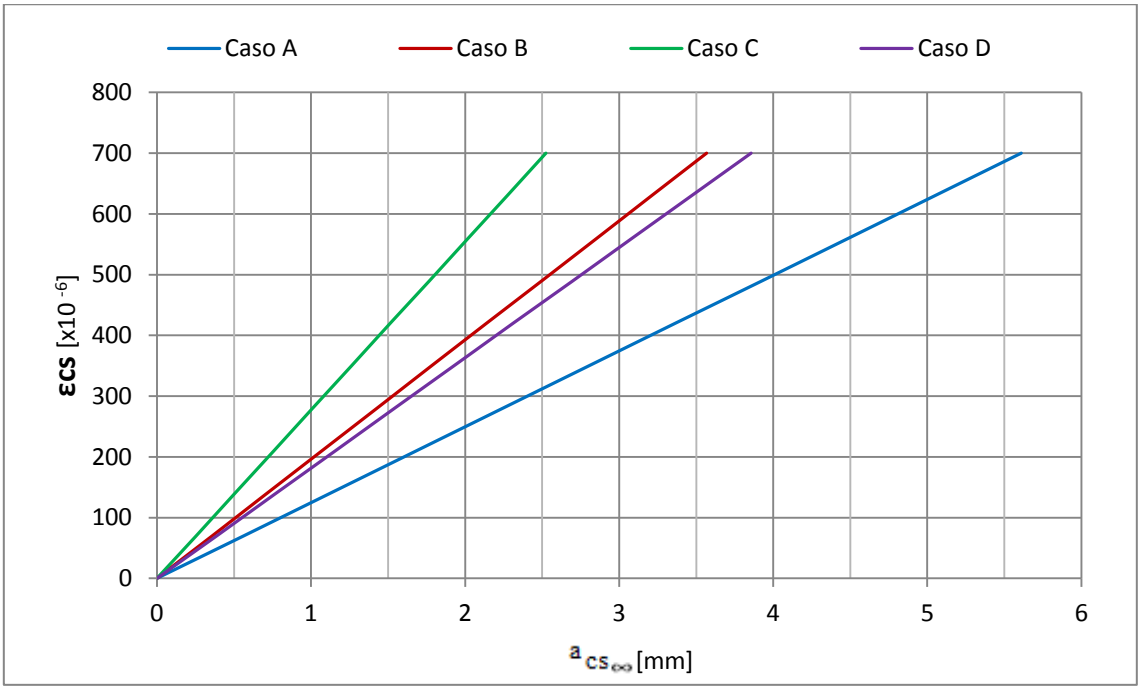


Fig. 5.3 – Flecha a longo prazo devido à retração, a_{cs}

Da análise da figura 5.3 pode-se concluir que a flecha devido à retração, a_{cs}, varia linearmente com extensão de retração, ε_{cs}. Observa-se também que a deformação por retração é maior no caso da viga simplesmente apoiada (Caso A) e menor no caso da viga bi-encastrada (Caso C), isto deve-se ao facto de a viga bi-encastrada possuir quantidades semelhantes de armadura superior e inferior, o que faz com que as curvaturas junto aos apoios sejam negativas e contrariam os efeitos das curvaturas positivas da zona central da viga.

5.4. Influência da relação entre a armadura de compressão e de tração, ρ'/ρ

Apresenta-se nas figuras seguintes a relação momento – flecha a longo prazo, para quatro valores de ρ'/ρ: 0, 0,25, 0,5 e 1.0. São apresentados também, diagramas que traduzem a diferença em % dos valores das flechas, registados admitindo vários níveis de ρ'/ρ, em comparação com um valor de referência, correspondente à ausência de armadura de compressão ($\rho'/\rho = 0$).

Os valores do momento fletor dizem respeito à secção de meio vão das vigas, tendo sido considerado um coeficiente de fluência, $\varphi = 2{,}5$ e desprezada a contribuição da retração no cálculo da deformação.

Da análise das figuras seguintes, observa-se, como era esperado, que quanto maior é o valor de ρ'/ρ, menor será a deformação da viga.

A armadura de compressão, para além de aumentar o momento de inércia da secção, reduz a importância do betão, o qual é sensível ao efeito da fluência.

A influência da relação ρ'/ρ é maior quando a estrutura se encontra em estado não fendilhado ($M \leq M_{cr}$), do que quando se encontra em estado fendilhado ($M > M_{cr}$).

Normalmente no dimensionamento de estruturas de betão armado o valor admitido para a armadura de compressão varia entre 25 e 50 % da armadura de tração presente na estrutura. Conclui-se então pela análise dos resutados, que para valores correntes da relação ρ'/ρ, entre 0,25 e 0,5 a armadura de compressão reduz a flecha a longo prazo em cerca de 7 a 13 % no caso A, em 4 a 8 % no caso B, em 2 a 5 % no caso C e em 4 a 8 % no caso D.

Note-se que, em estado fendilhado, à exceção do caso A, para uma variação da relação ρ'/ρ de $\pm\,100\,\%$ (de 0,5 para 0 ou de 0,5 para 1), a deformação não varia mais de 10%.

Caso A:

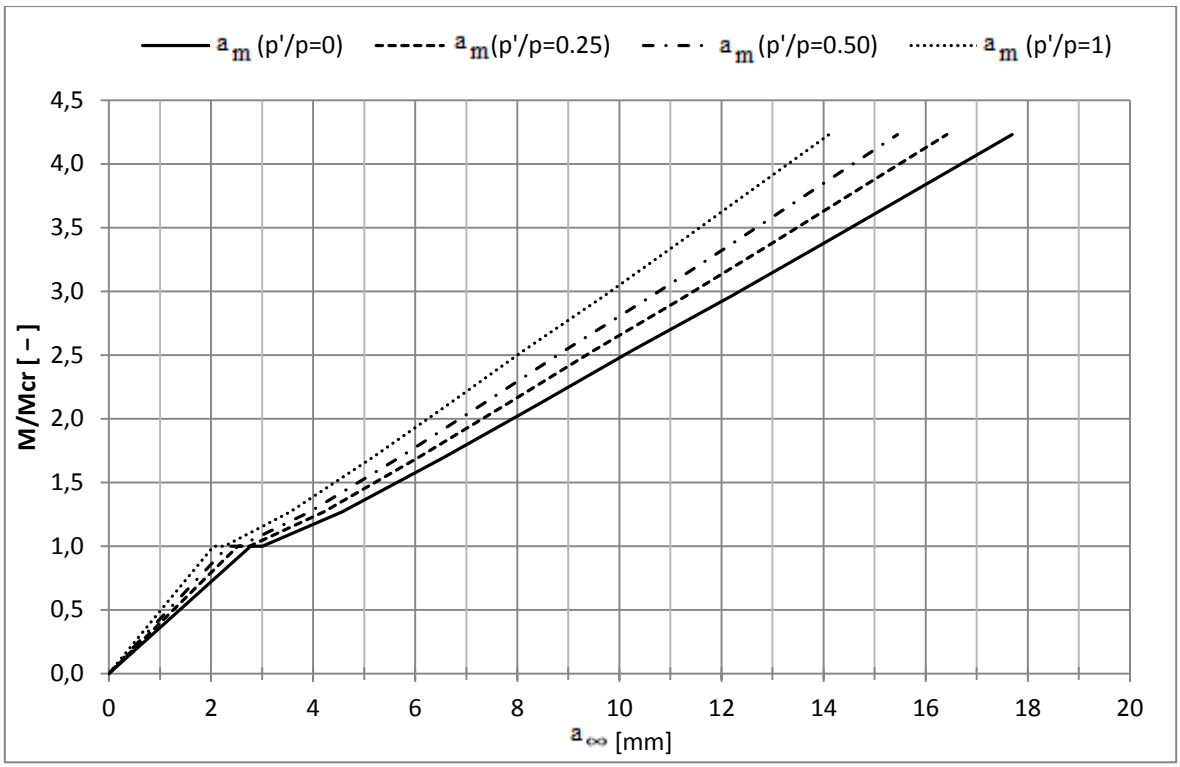


Fig. 5.4 – Influência da relação ρ'/ρ sobre a deformação (Caso A)

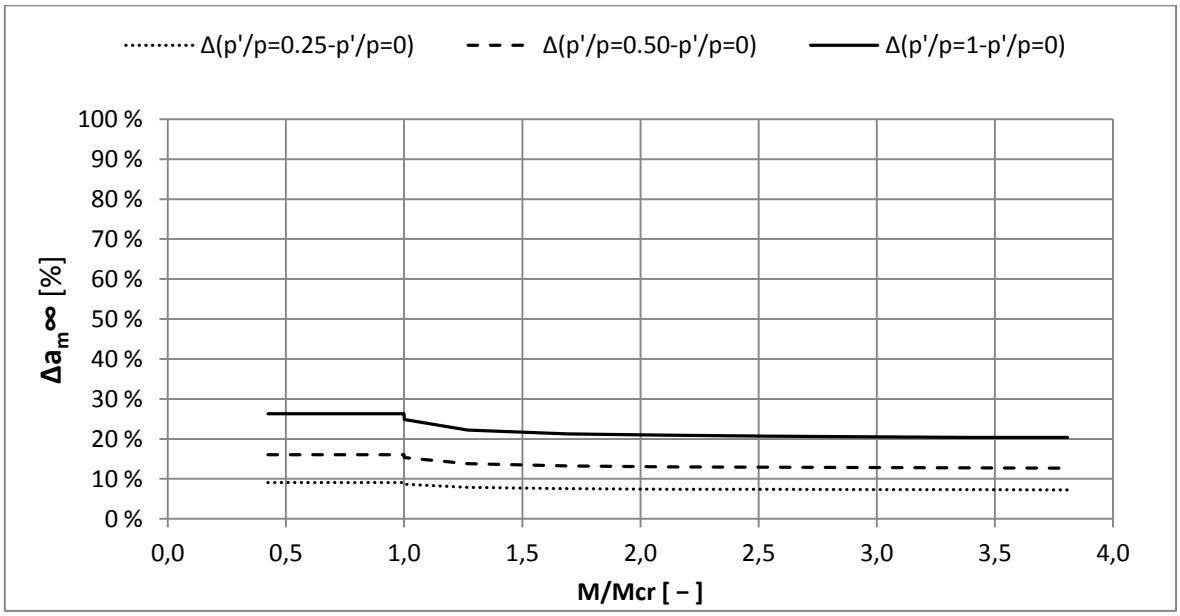


Fig. 5.5 – Variação da deformação para diferentes valores de ρ'/ρ (Caso A)

Caso B:

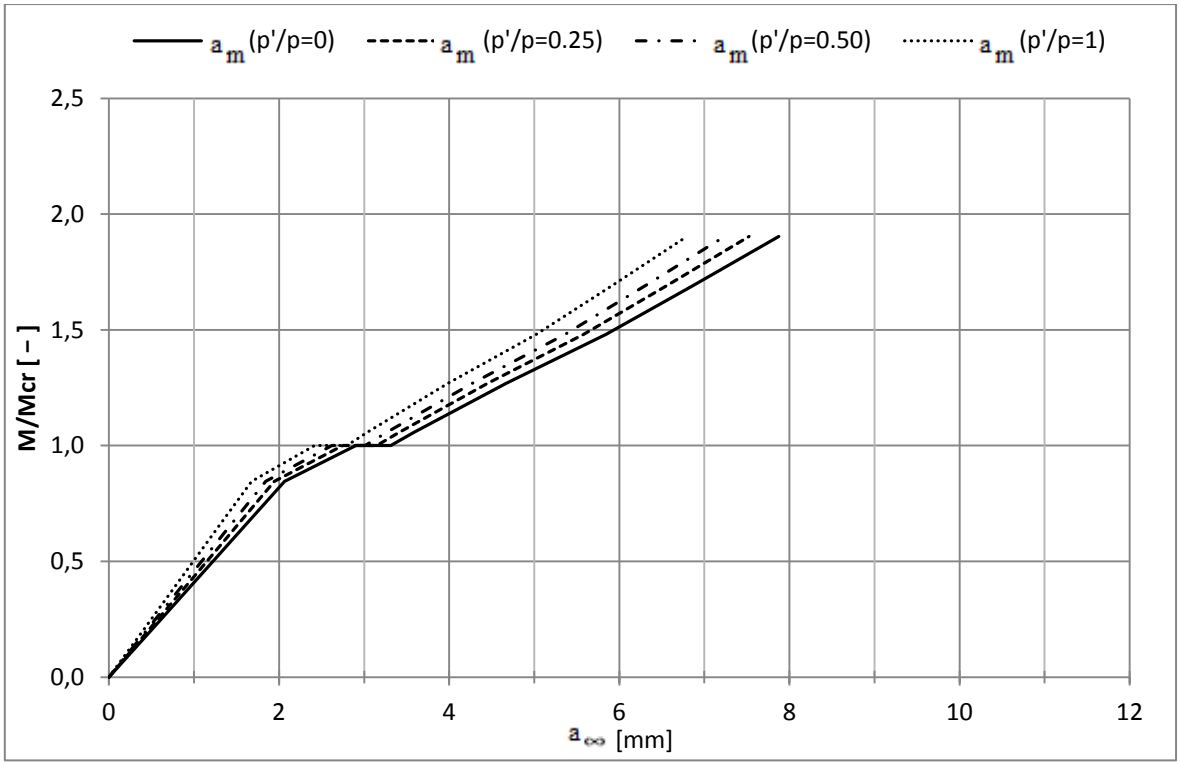


Fig. 5.6 – Influência da relação ρ'/ρ sobre a deformação (Caso B)

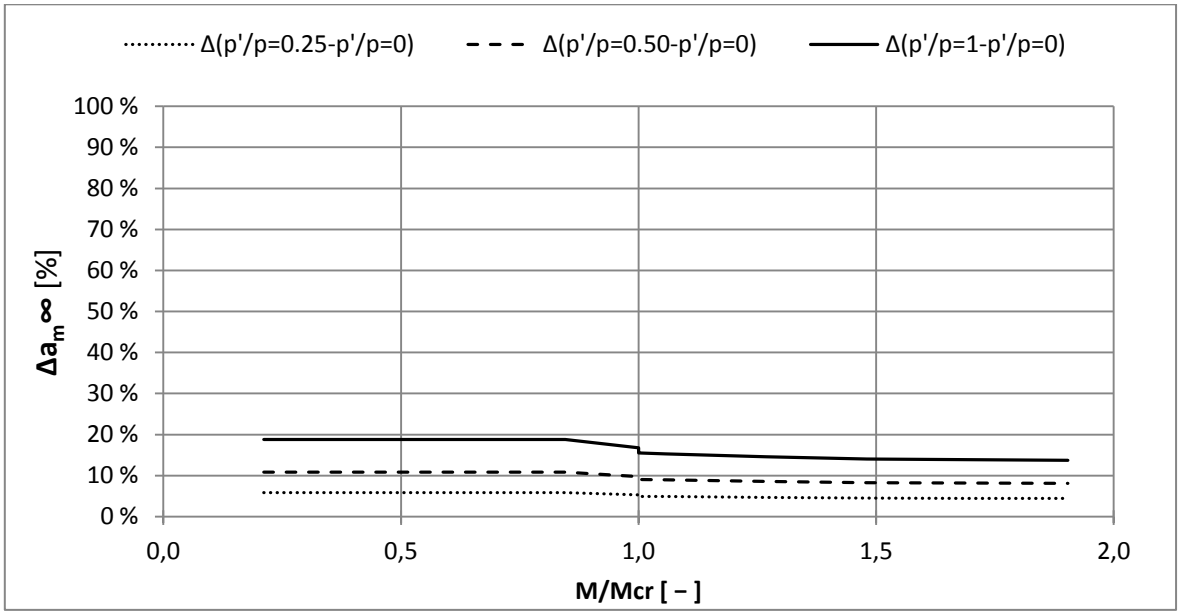


Fig. 5.7 – Variação da deformação para diferentes valores de ρ'/ρ (Caso B)

Caso C:

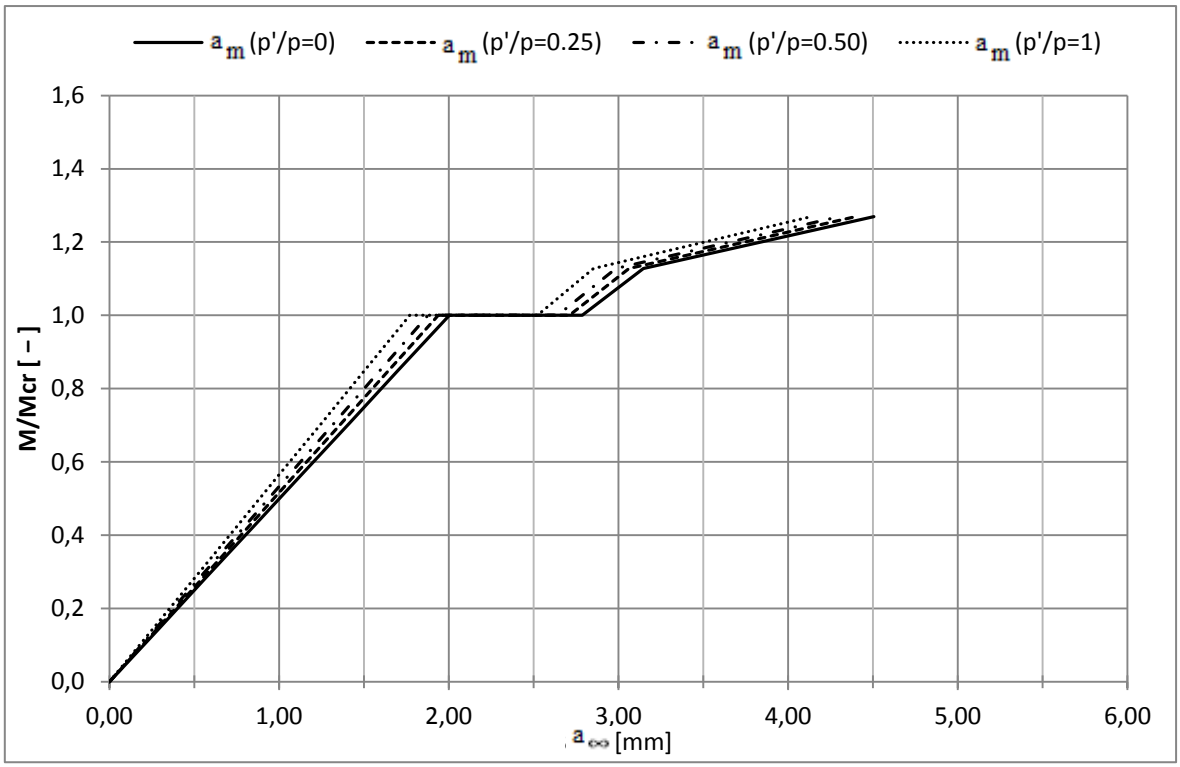


Fig. 5.8 – Influência da relação ρ'/ρ sobre a deformação (Caso C)

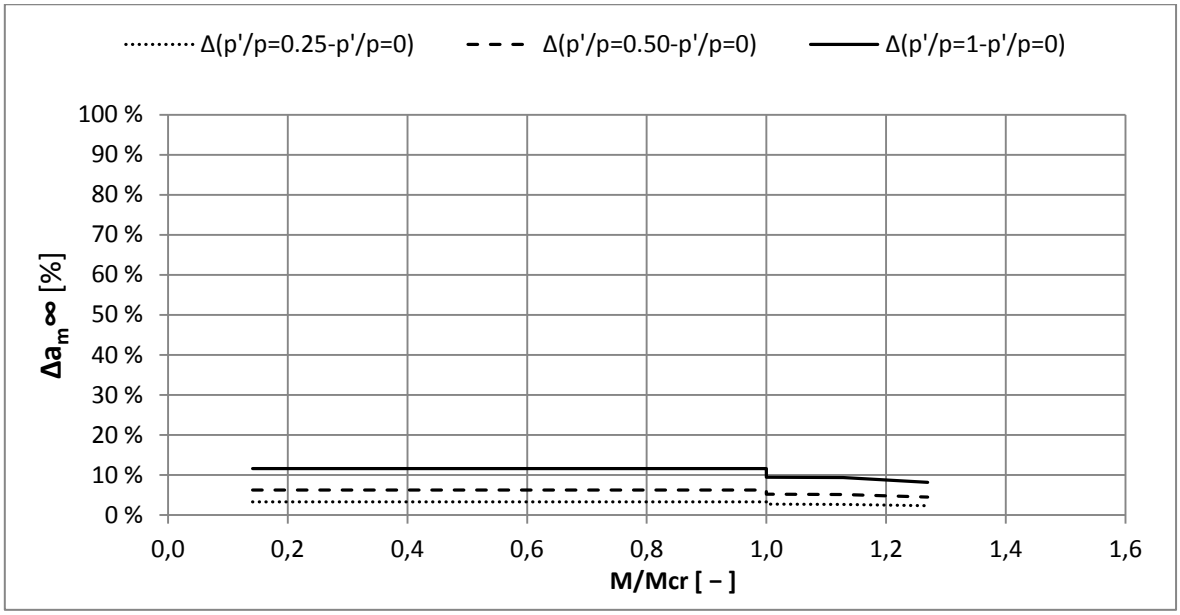


Fig. 5.9 – Variação da deformação para diferentes valores de ρ'/ρ (Caso C)

Caso D:

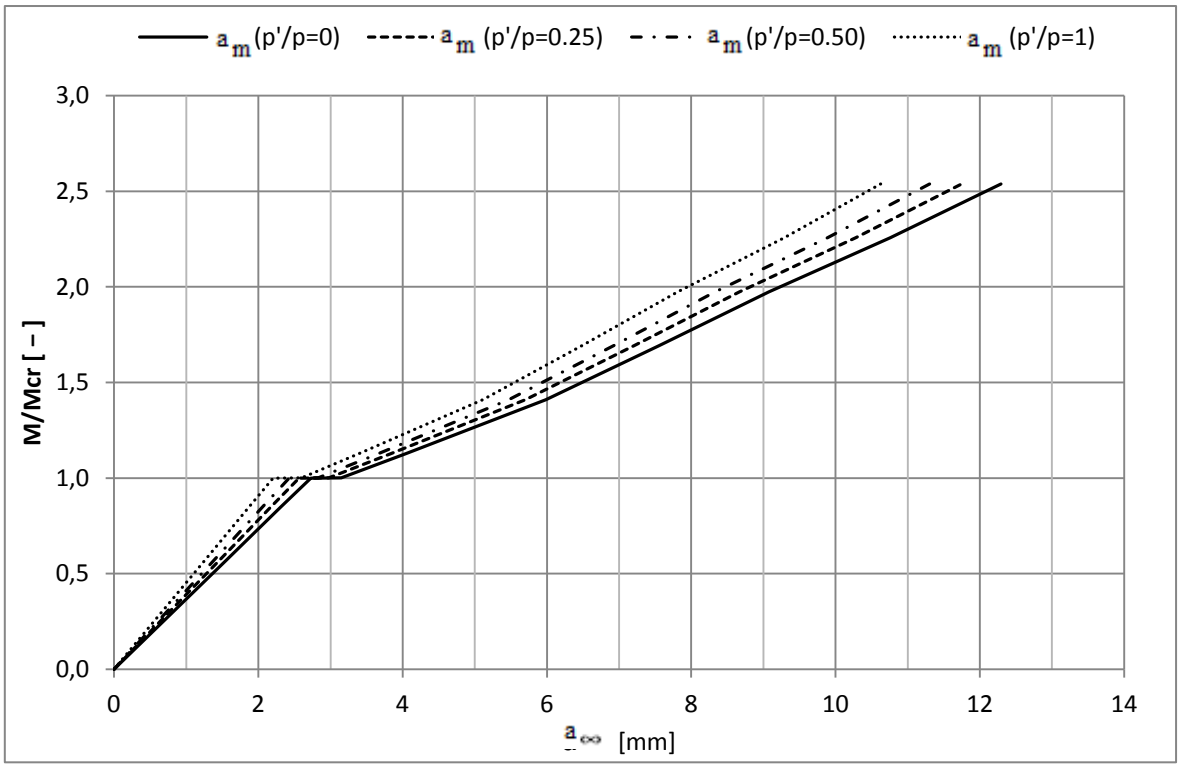


Fig. 5.10 – Influência da relação ρ'/ρ sobre a deformação (Caso D)

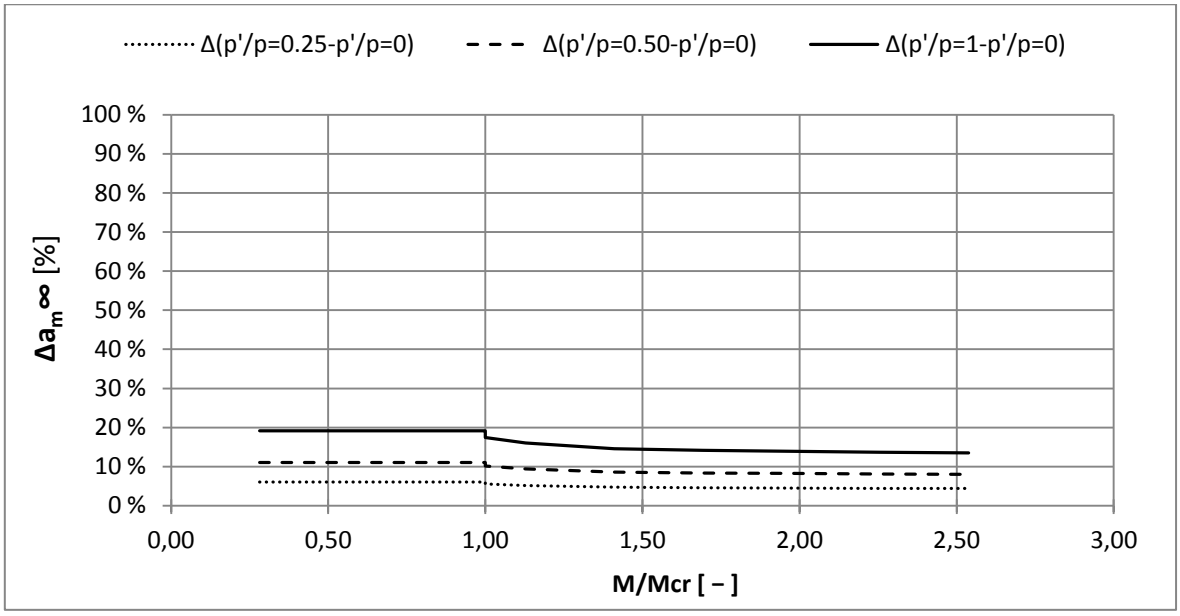


Fig. 5.11 – Variação da deformação para diferentes valores de ρ'/ρ (Caso D)

Capítulo 6

Conclusões e Recomendações

Este trabalho tinha como principais objetivos o estudo e a quantificação da deformação em vigas de betão armado, através do método de cálculo de integração numérica e de diversos métodos simplificados, fazer uma análise comparativa entre os diversos métodos e elaborar recomendações para a aplicação de um método simplificado.

Desta análise foi possível concluir que a aplicação dos métodos simplificados (bilinear, coeficientes globais e o presente no Model Code 1990), apresentam resultados razoáveis quando se estuda vigas de secção retangular. No caso de vigas de secção em T e em I estes métodos apresentam resultados pouco consistentes, logo deste estudo não se pode tirar conclusões precisas acerca da eficiência da aplicação destes métodos em vigas de secção não retangular.

Neste estudo os resultados obtidos através da aplicação do método da secção determinante (MSD) são aqueles que apresentam uma melhor aproximação quando comparados com os obtidos pela aplicação do método de integração numérica. O autor deste trabalho recomenda portanto o uso deste método simplificado de cálculo da flecha em vigas de betão armado.

Este trabalho tinha também como objetivo estudar a influência que certos parâmetros têm na deformação de vigas de betão armado. Neste estudo verificou-se, como era esperado, que a fendilhação assim como a fluência são os parâmetros que têm maior influência na deformação de vigas de betão armado. No caso da fluência esta é tanto mais influente quanto menor for o carregamento a que a viga está sujeita.

Foi estudada a influência de outros parâmetros como é o caso da resistência à tração do betão, da retração e da percentagem de armadura de compressão. Conclui-se, com base neste estudo, que estes parâmetros têm uma influência menor quando comparados com a influência que a fendilhação e a fluência têm na deformação.

Neste trabalho fez-se um estudo comparativo entre os resultados experimentais e os resultados teóricos, obtidos pela aplicação do método de integração numérica (MIN). Nesse estudo, ao contrário do que era esperado, os resultados teóricos minoram os resultados experimentais, fato que é contra a segurança. Observou-se também que os resultados teóricos registam um erro relativo considerável quando comparados com os resultados experimentais. Este erro pode ser justificado por erros inerentes aos sistemas de ensaios assim como à assunção teórica de que as vigas eram geometricamente perfeitas e que o recobrimento das armaduras era constante e igual em todos os pontos das vigas. Outro fator que pode ter influência nos erros registados diz respeito à retração, a qual foi desprezada na determinação dos valores teóricos da deformação.

Seria interessante fazer uma análise comparativa de resultados experimentais com resultados teóricos obtidos pelo MIN para vigas sujeitas a cargas uniformemente distribuídas, mas o mesmo não foi possível devido à falta de dados de ensaios experimentais nestas condições. Daí neste trabalho ter-se feito somente a análise comparativa de vigas sujeitas a cargas concentradas, sendo esta prática a mais usual em laboratório quando se estuda a deformação de vigas.

Outro aspeto que seria pertinente estudar é a comparação entre resultados experimentais e teóricos a longo prazo. Seria interessante em desenvolvimentos futuros efetuar em laboratório modelos de ensaios de vigas em betão armado que simulem o comportamento a longo prazo de forma a obter uma resposta quanto è eficiência dos resultados obtidos por métodos simplificados aquando do estudo da deformação a longo prazo.

De forma a determinar e quantificar a deformação em vigas de betão armado sujeitas a cargas uniformemente distribuídas, o autor deste trabalho implementou um programa em VBA Excel, o qual está previsto ser facultado aos alunos das disciplinas de betão armado da FCT/UNL, para que lhes seja útil no seu percurso académico e profissional.

Referências bibliográficas

[1] CEN; EN 1992-1-1, "Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings", 2004.

[2] fib (Féderation Internationale du Béton), "Structural Concrete. Textbook on Behaviour, Design and Performance", Bulletin 2, Julho 1999, pp. 103-139.

[3] Comité Euro-Internacional du Béton, CEB-FIP, "Model Code 1990, Design Code", Thomas Telford, 1993.

[4] V. J. Ferrari, "Folhas da disciplina de Resistência dos materiais", Universidade Estadual de Maringá.

[5] A. Portela e F. Siva, "Mecânica dos Materiais", Plátano Edicões Técnicas, 1996.

[6] R. Favre, J.-P. Jaccoud, O. Burdet e H. Charif, "Traité de Génie Civil Volume 8, Dimensionnement des structures en béton: Aptitude au service et éléments de structures", 1997.

[7] Comité Euro-International du Béton, CEB, "Design Manual Cracking and Deformation", Bulletin d'Information nº 143, 1981.

[8] Comité Euro-Internacional du Béton, CEB-FIP, "Model Code 2010, Final draft", Setembro 2011.

[9] V. Lúcio, "Folhas da disciplina de Estruturas de Betão Armado I", FCT/UNL.

[10] European Concrete Platform ASBL, "Commentary Eurocode 2", Junho 2008.

[11] J. A. Figueiras, "Folhas da disciplina de Estruturas de Betão 2", FEUP, 2002/2003.

[12] I. M. Silva, "Análise da redistribuição de esforços em vigas de concreto protendido com secções compostas", Universidade de São Paulo, 2003.

[13] T. Carvalho, "Reforço à flexão de vigas de betão armado com compósitos de CFRP", Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2010.

[14] H. Biscaia, "Comportamento e Modelação da Ligação GFRP/Betão em Elementos de Betão Armado Expostos a Ambientes Agressivos", Dissertação de Doutoramento em Engenharia Civil, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Julho 2012.

[15] T. Carvalho, C. Chastre, H. Biscaia e R. Paula, “Flexural behaviour of RC T-beams strengthened with diferrent FRP materials,” em *3rd fib International Congress - 2010*.

Anexos

A 1 – Flecha elástica em vigas

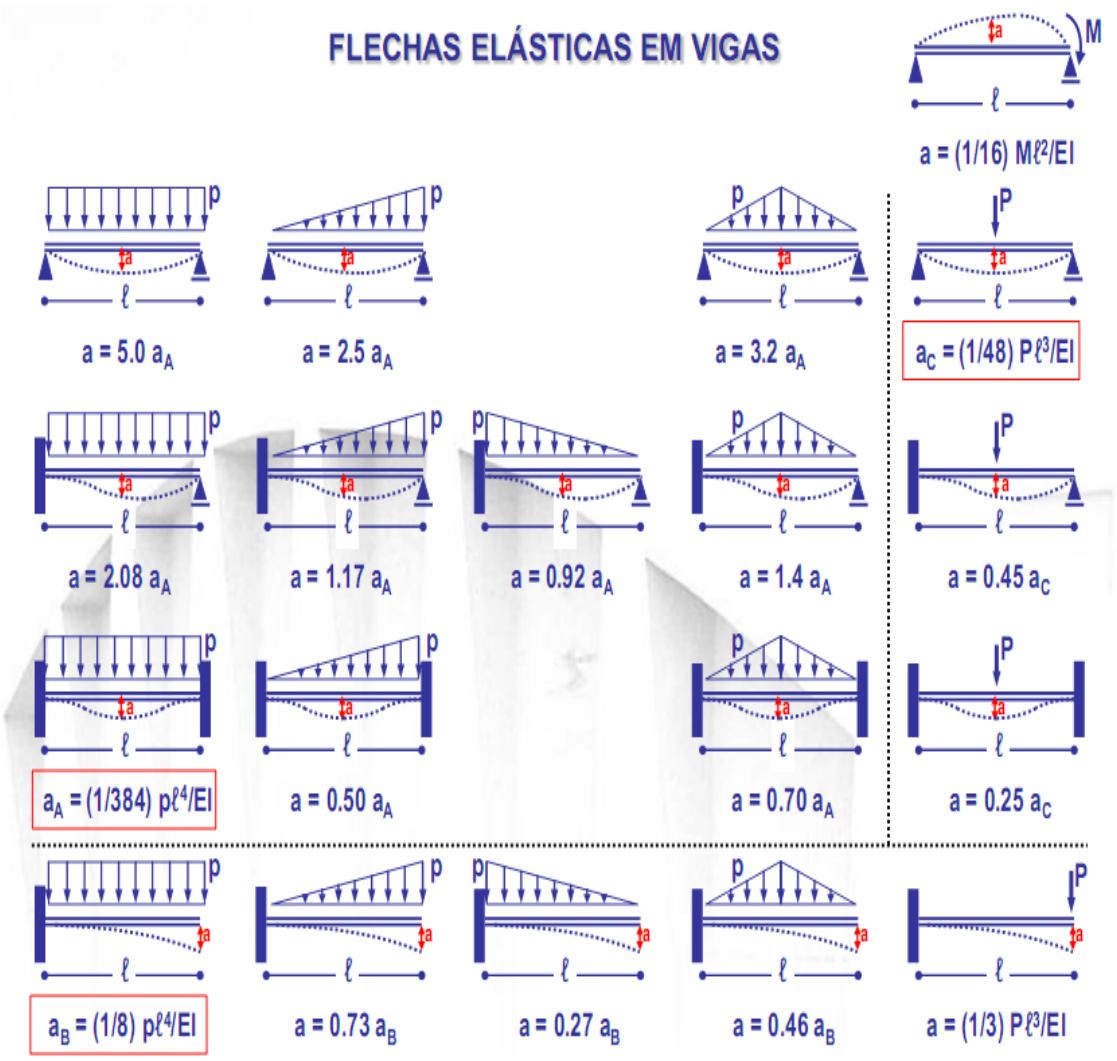
A 2 – Ábacos para determinação dos coeficientes k_{s1}, k_{s2}, $k_{\varphi 1}$, $k_{\varphi 2}$ – Método bilinear

A 3 – Ábacos para determinação dos coeficientes k'_s, k_t – Método dos coeficientes globais

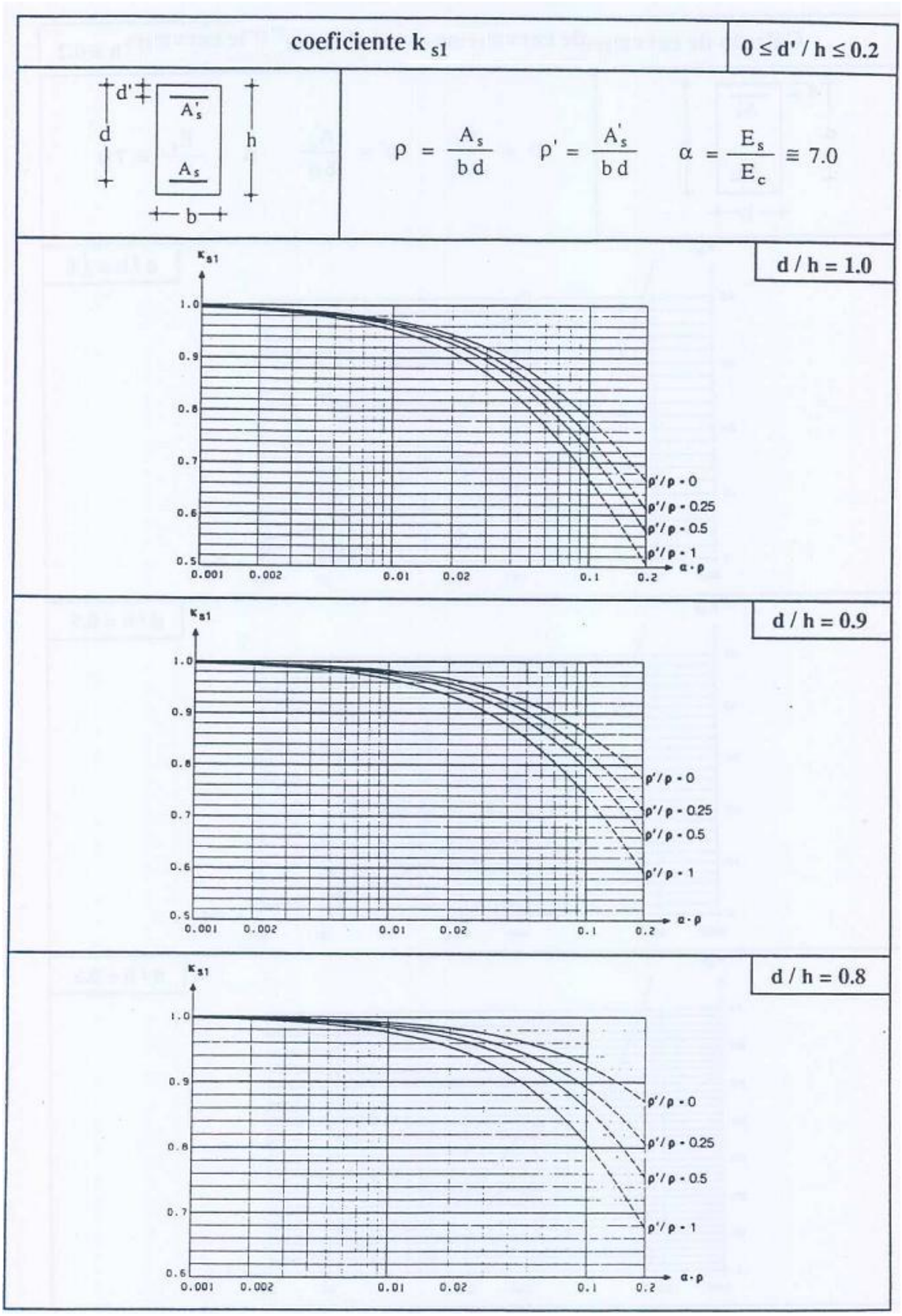
A 4 – Soluções dos exemplos de aplicação (Tab. 4.1) pelo método de integração numérica

A 5 – Resultados do exemplo demonstrativo do capitulo 3.5

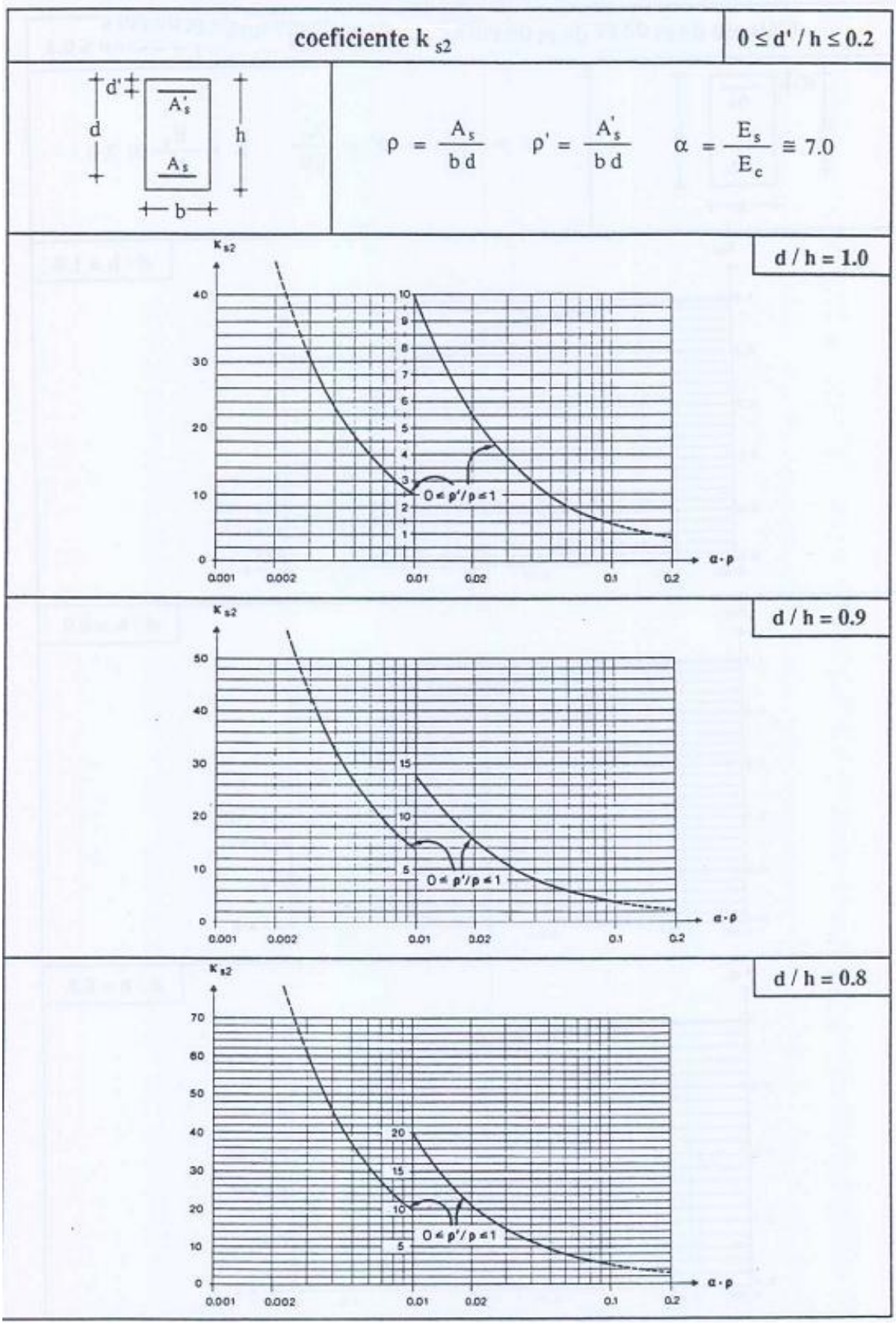
A 1 – Flecha elástica em vigas [9]



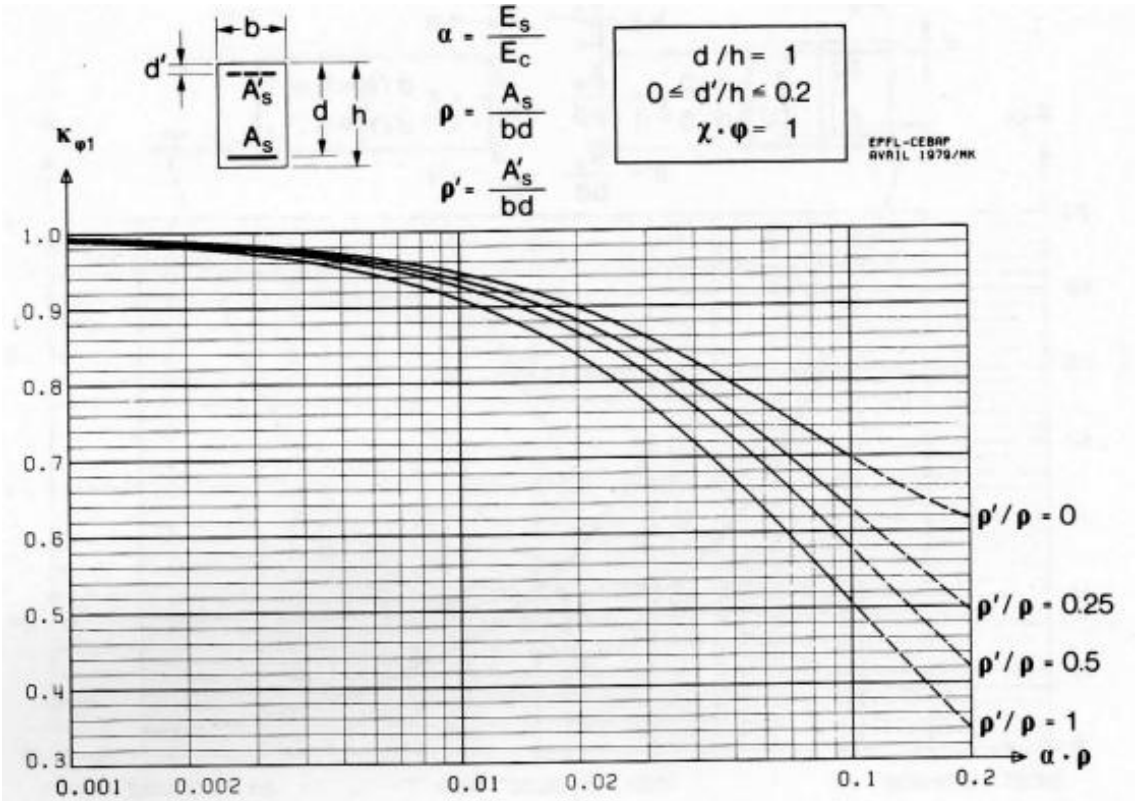
A 2.1 – Coeficiente k_{s1} – método bilinear [6]

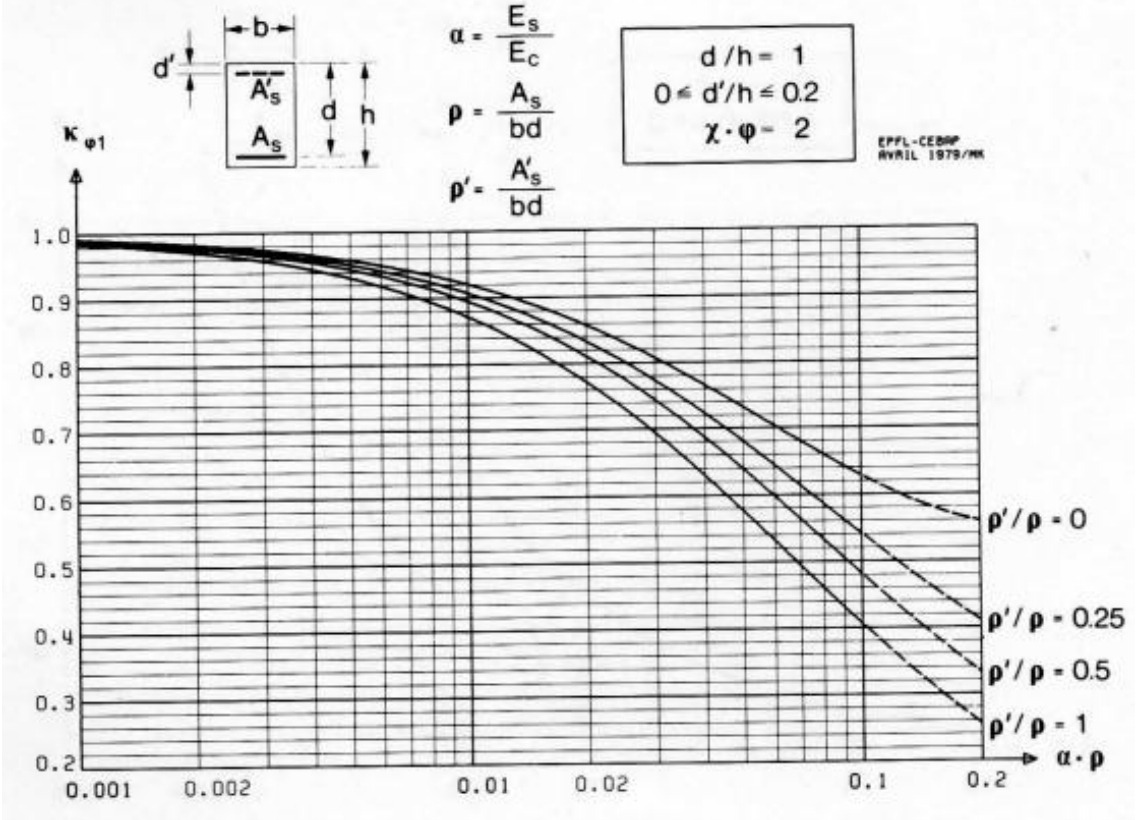


A 2.2 – Coeficiente k_{s2} – método bilinear [6]

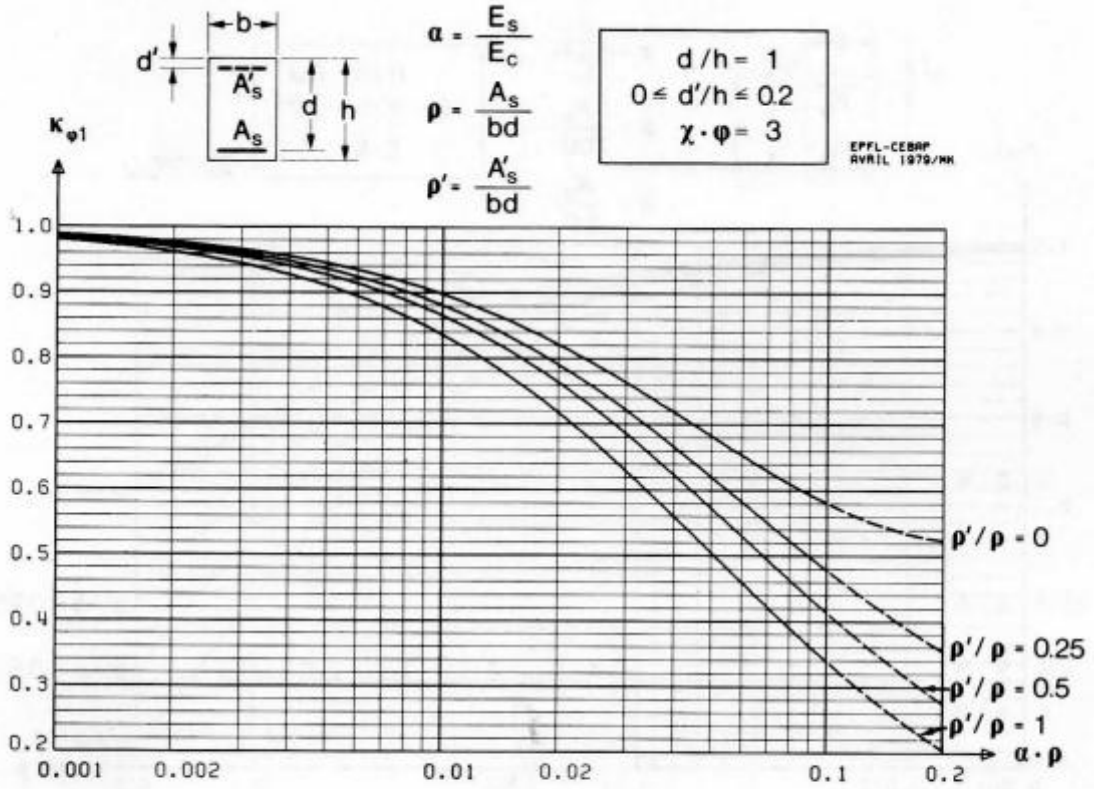


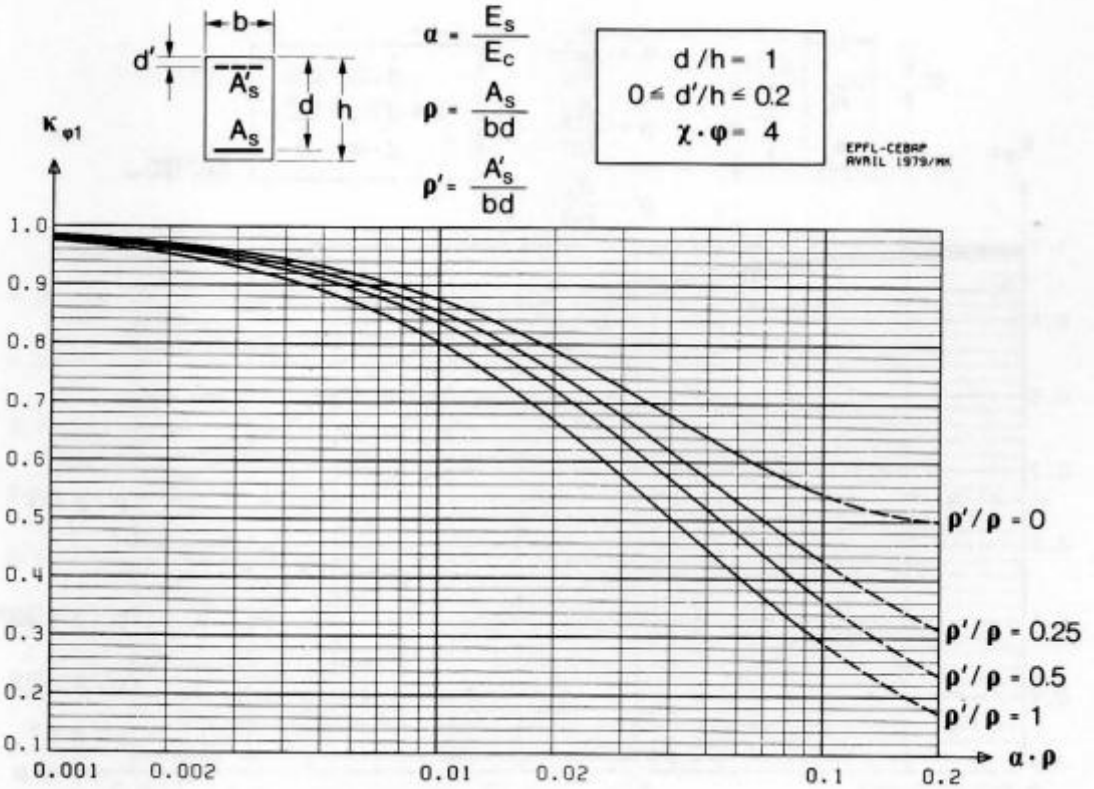
A 2.3 – Coeficiente $k_{\varphi 1}$ – método bilinear [6]



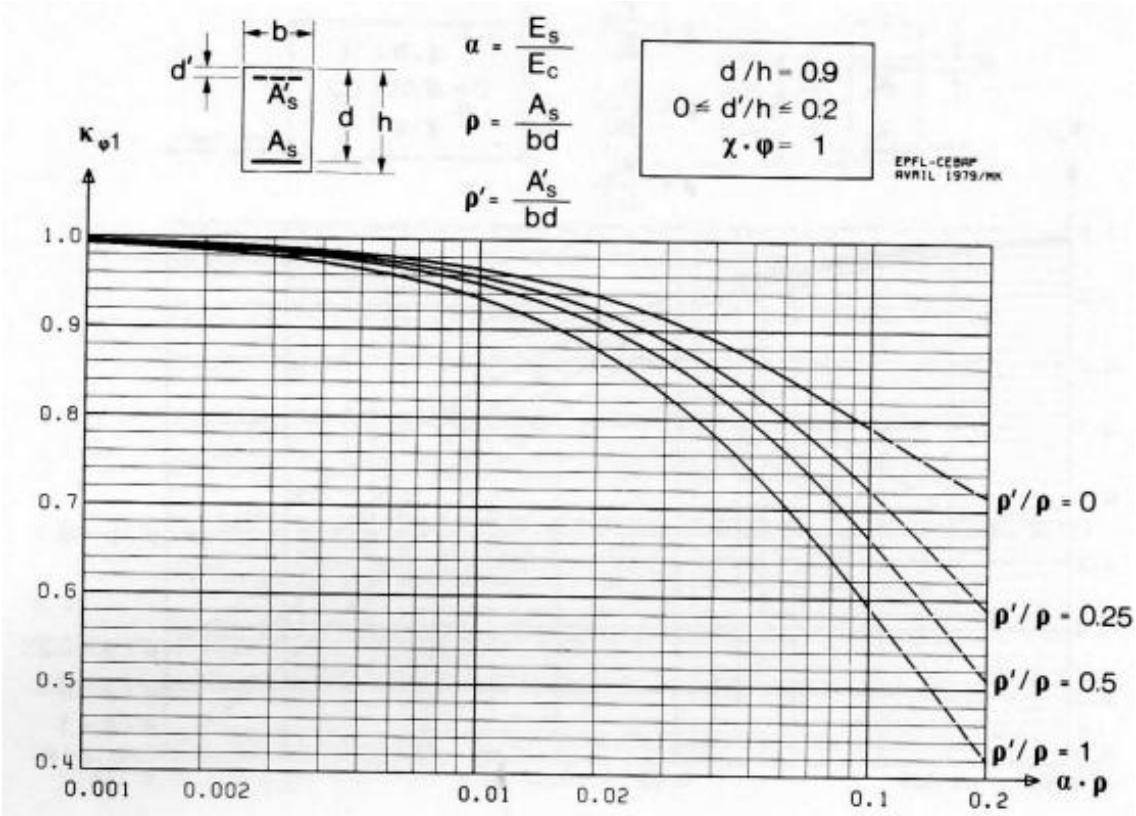


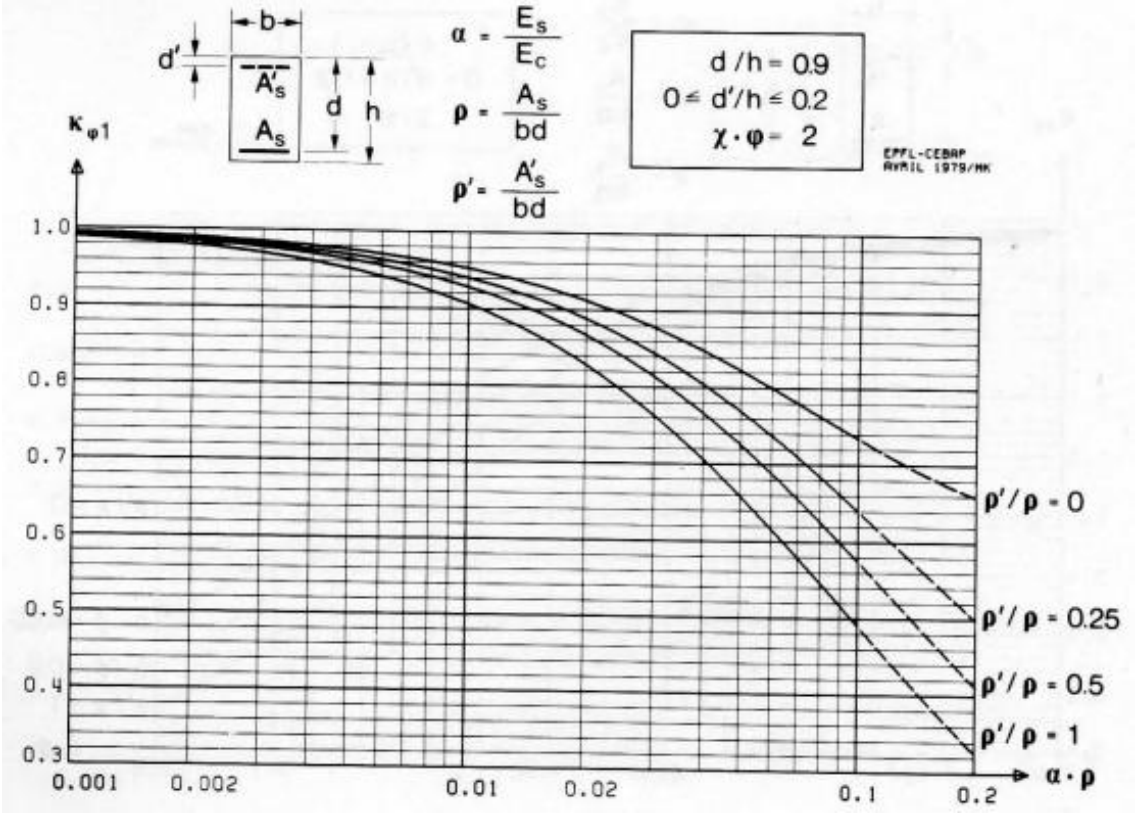
A 2.3 – Coeficiente $k_{\varphi 1}$ – método bilinear [6]



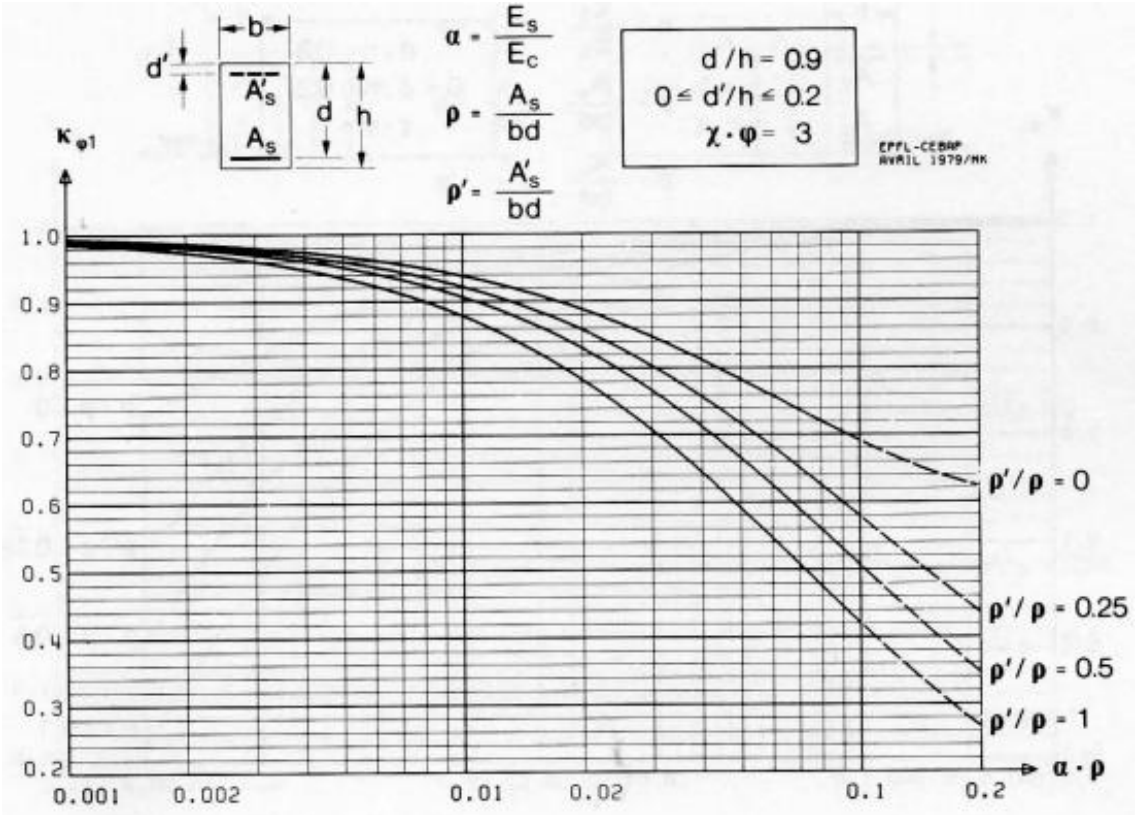


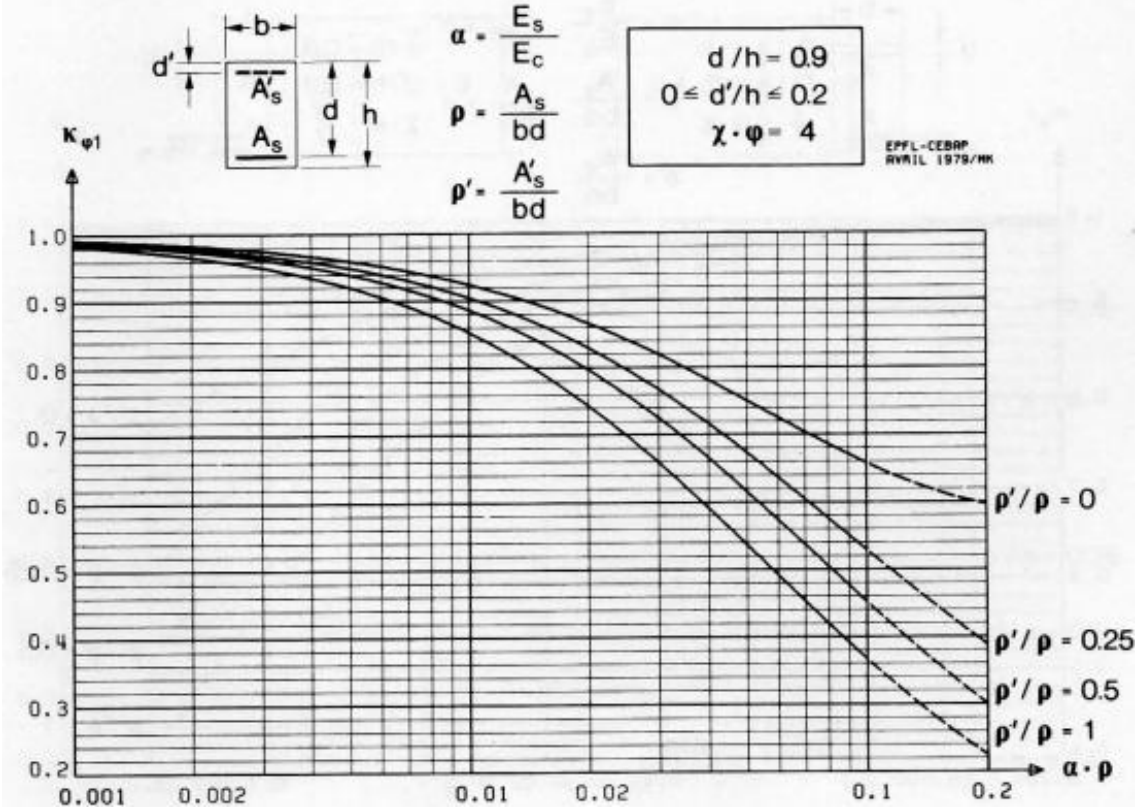
A 2.3 – Coeficiente $k_{\varphi 1}$ – método bilinear [6]



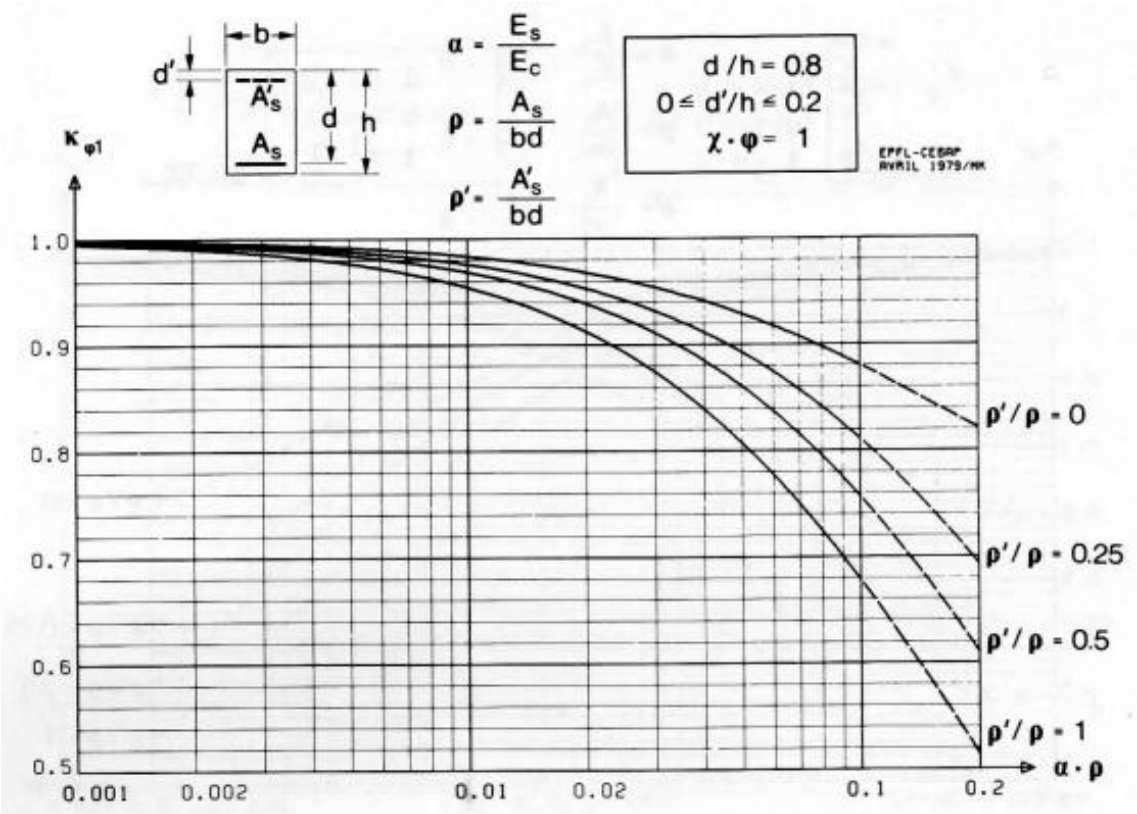


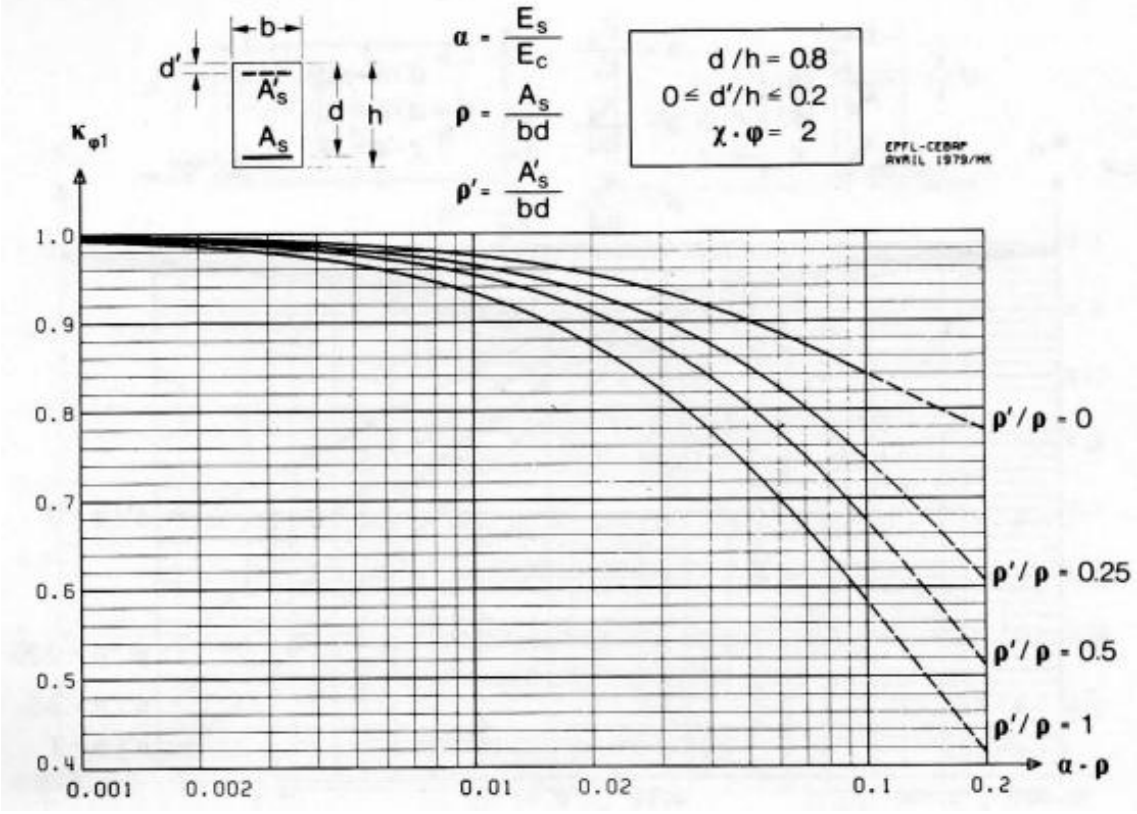
A 2.3 – Coeficiente $k_{\varphi 1}$ – método bilinear [6]



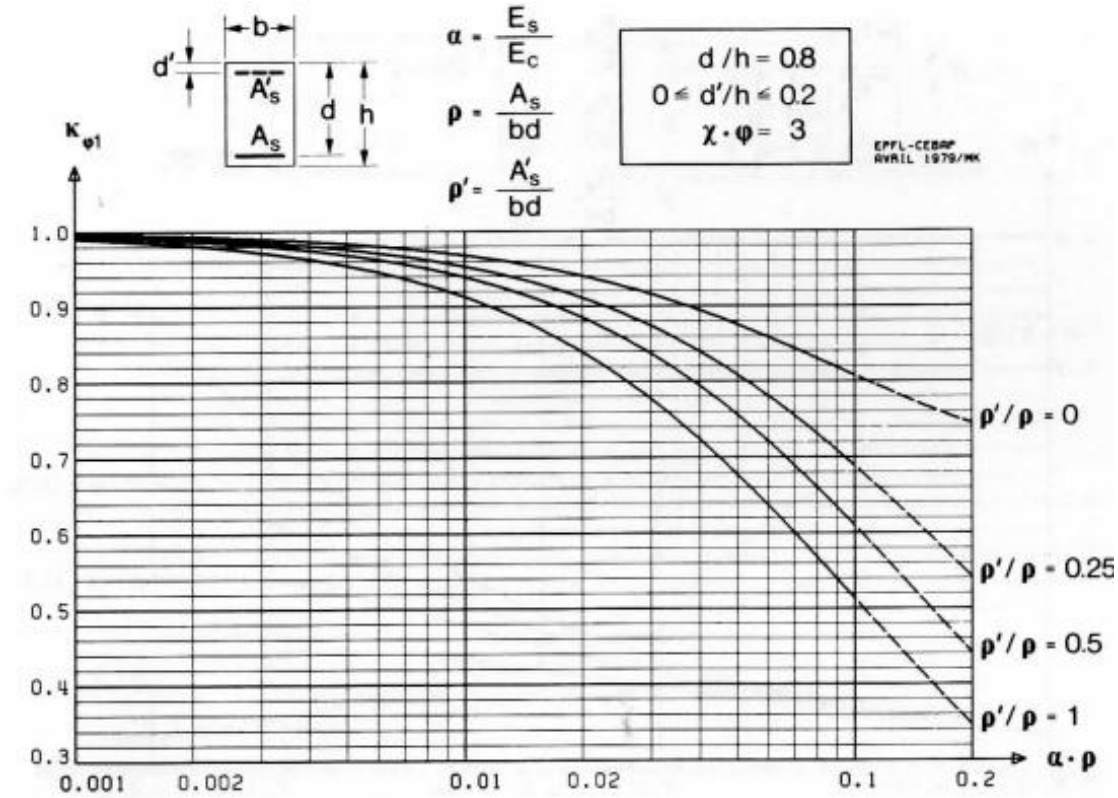


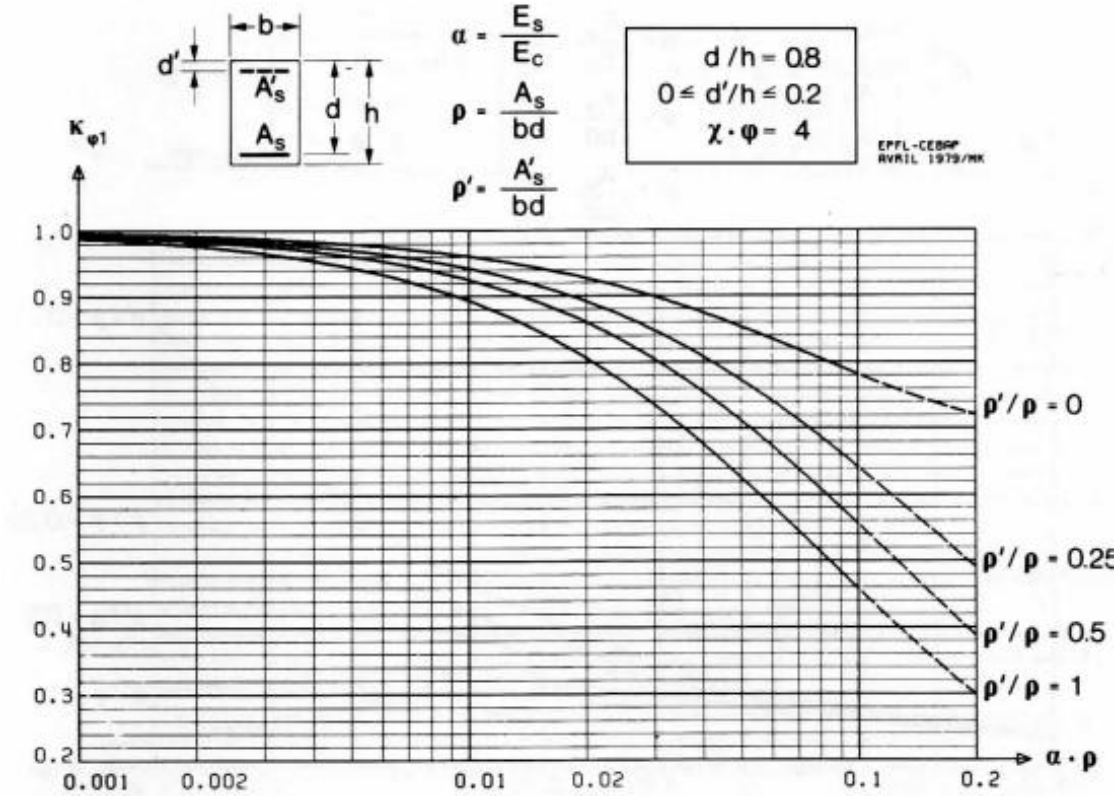
A 2.3 – Coeficiente $k_{\varphi 1}$ – método bilinear [6]



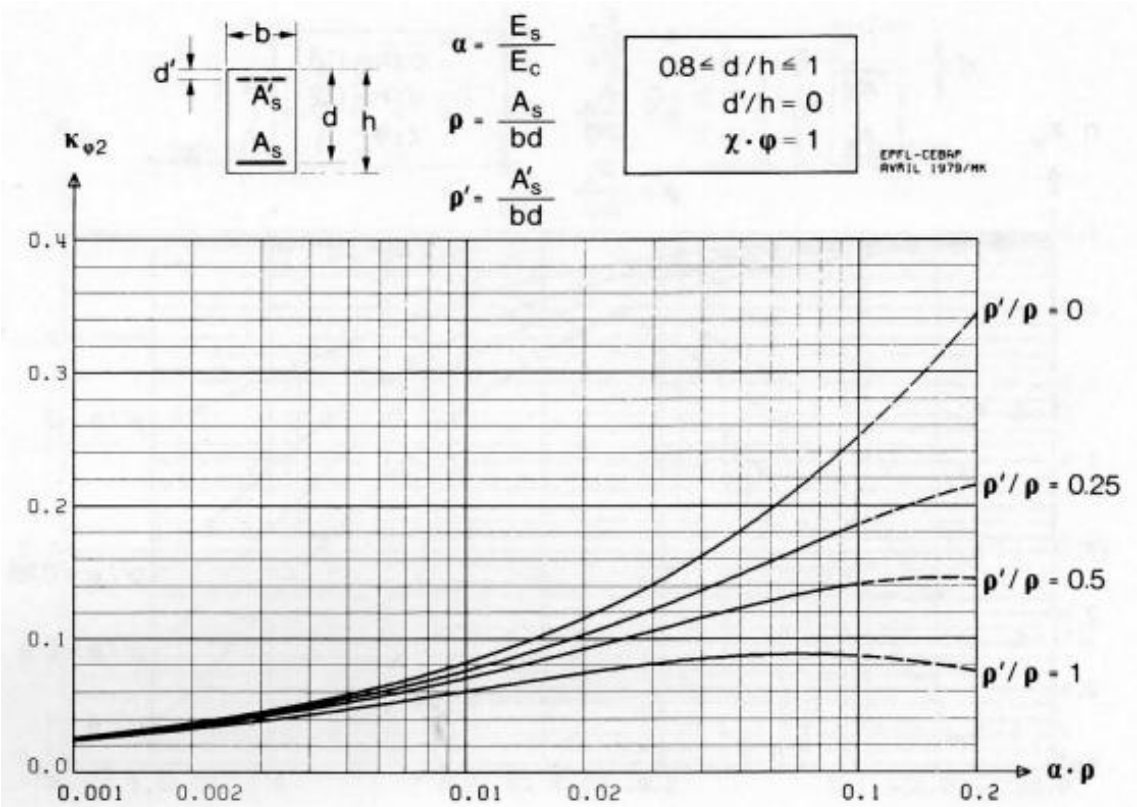


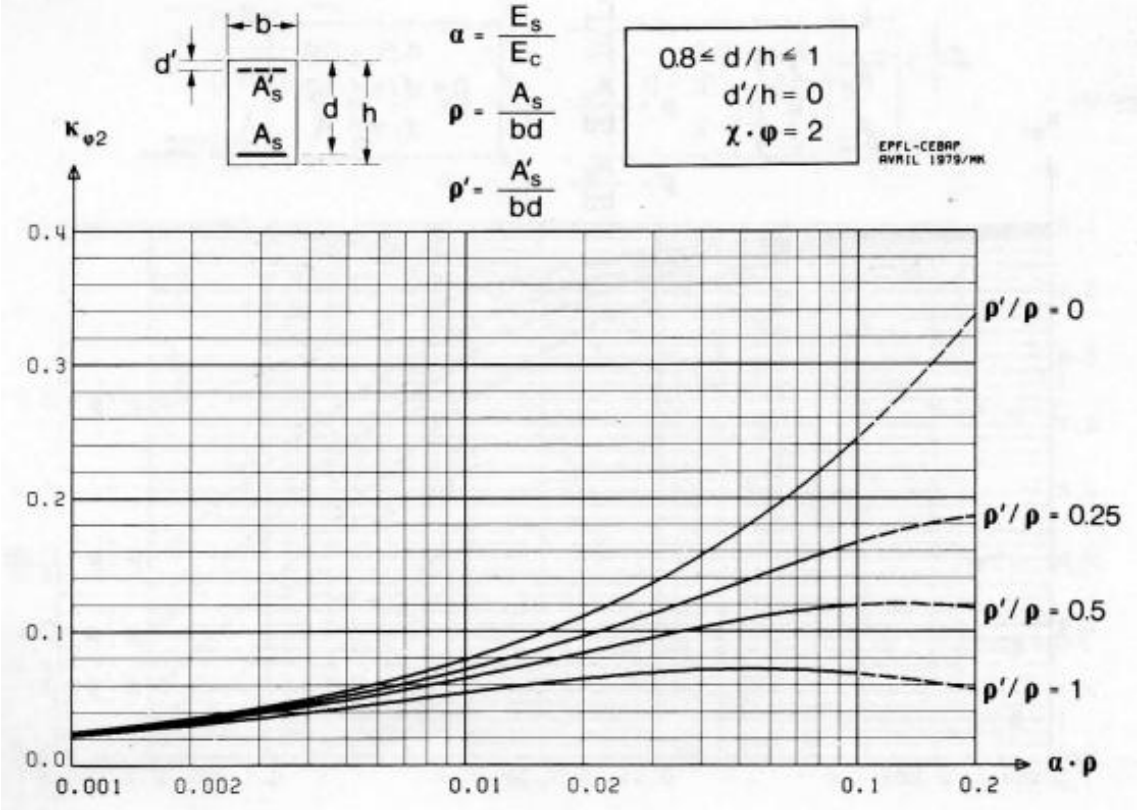
A 2.3 – Coeficiente $k_{\varphi 1}$ – método bilinear [6]



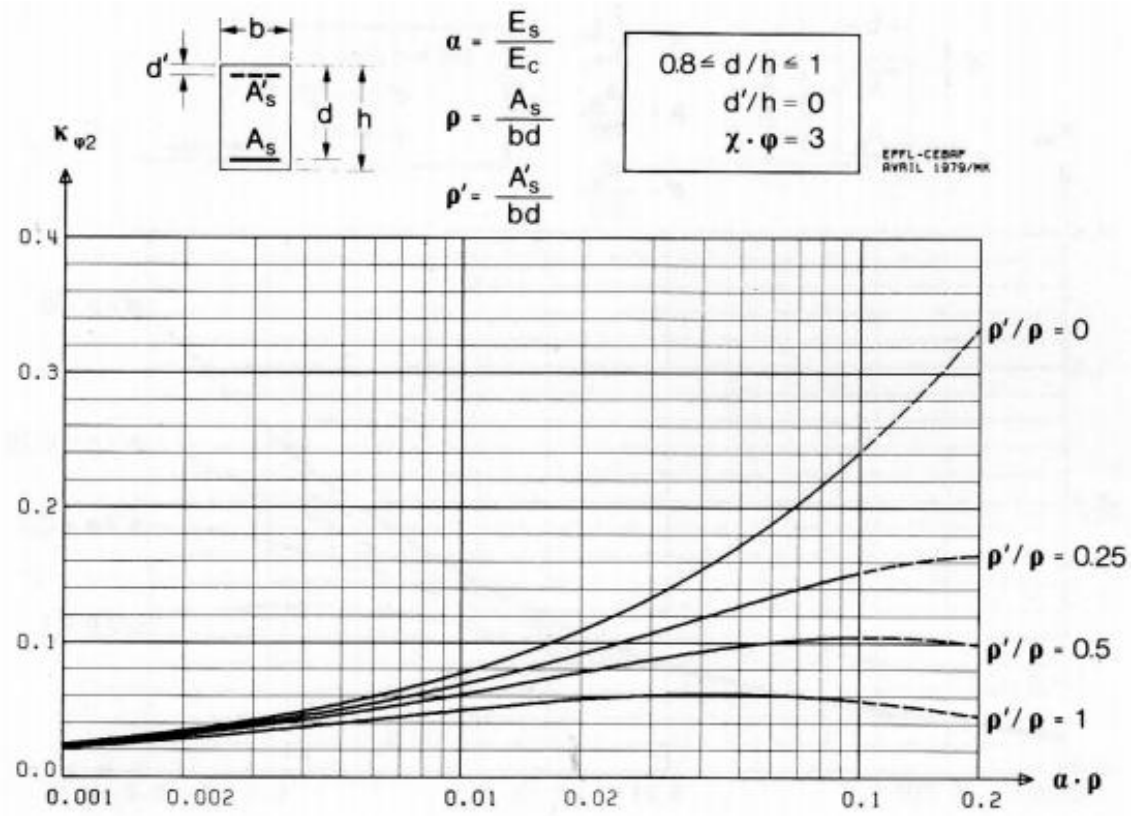


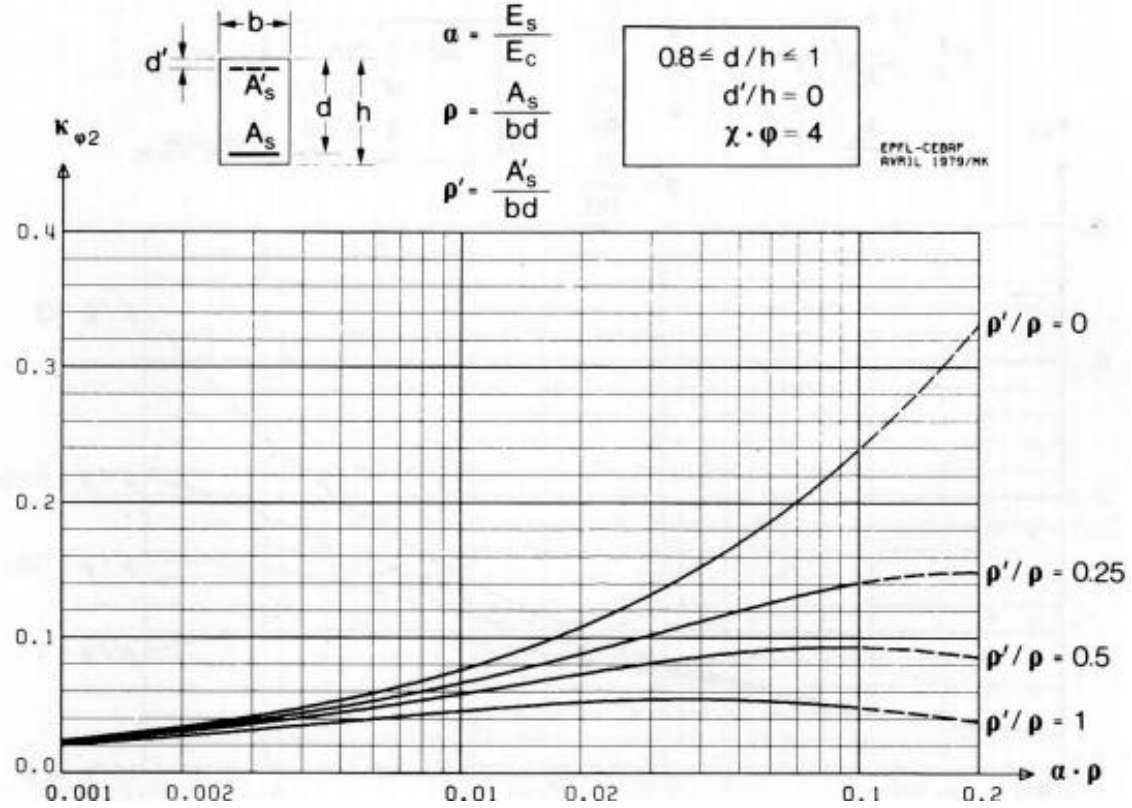
A 2.4 – Coeficiente $k_{\varphi 2}$ – método bilinear [6]



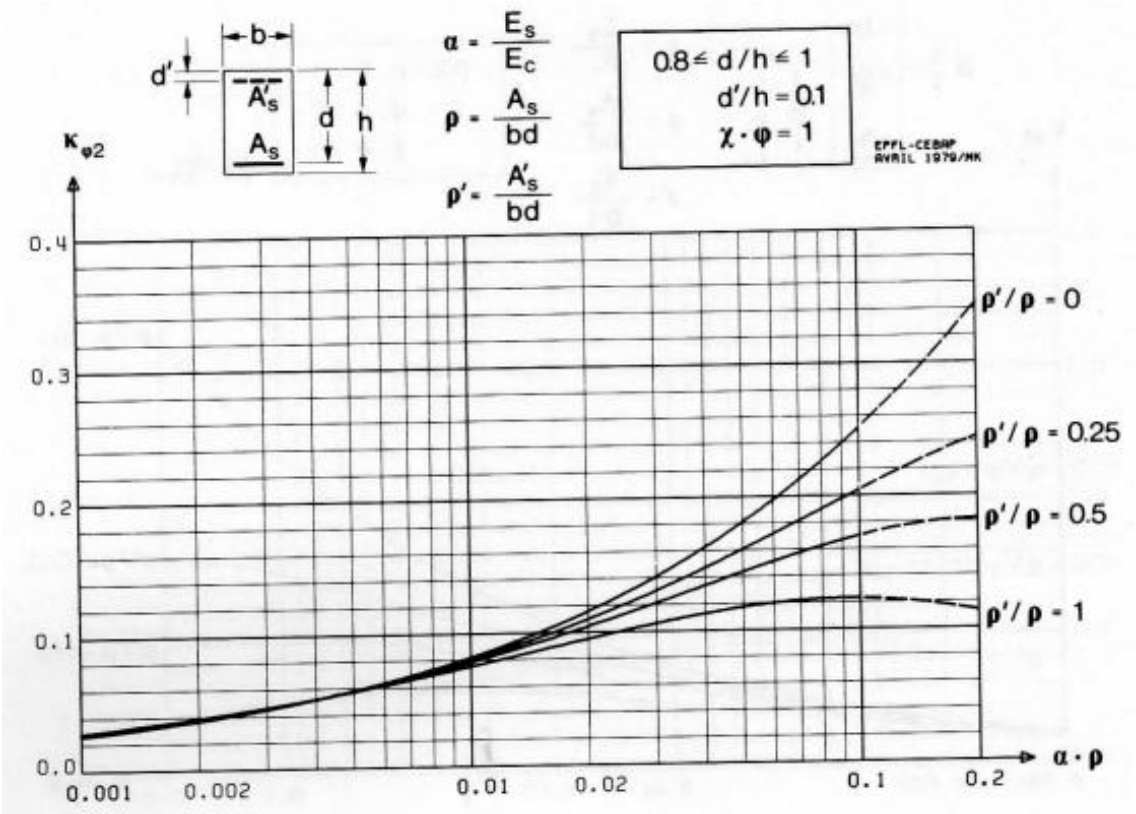


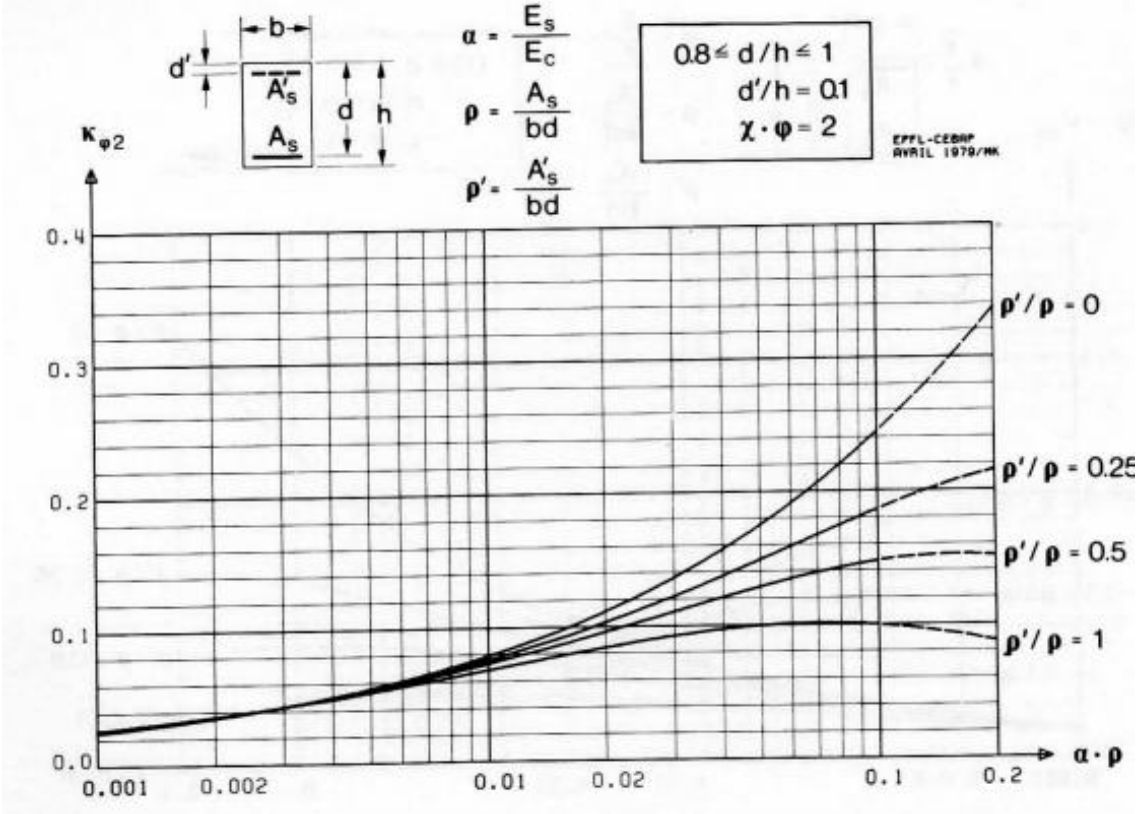
A 2.4 – Coeficiente $k_{\varphi 2}$ – método bilinear [6]



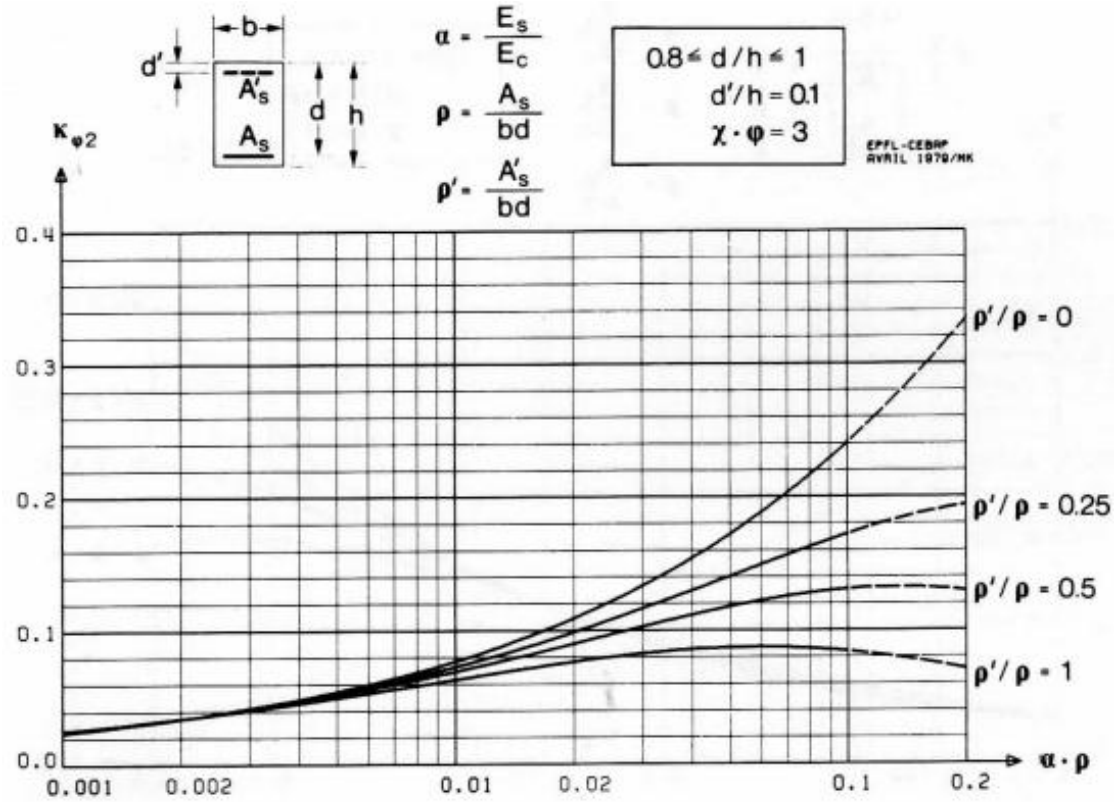


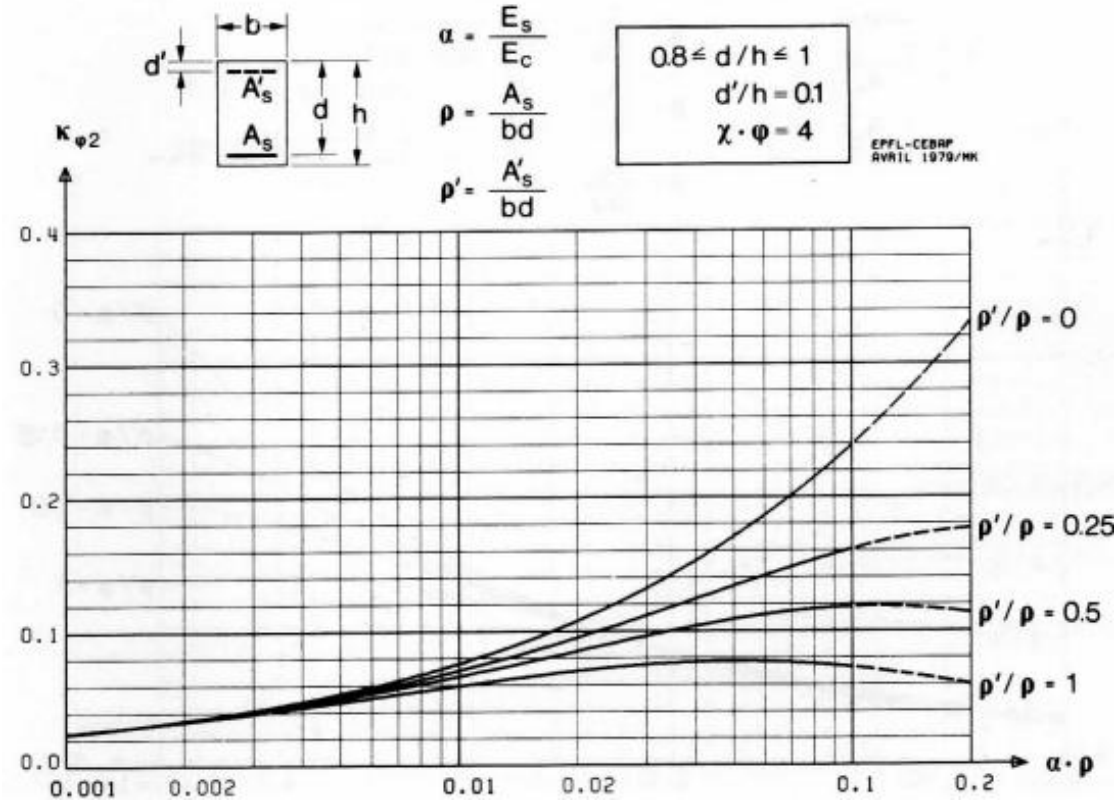
A 2.4 – Coeficiente $k_{\varphi 2}$ – método bilinear [6]



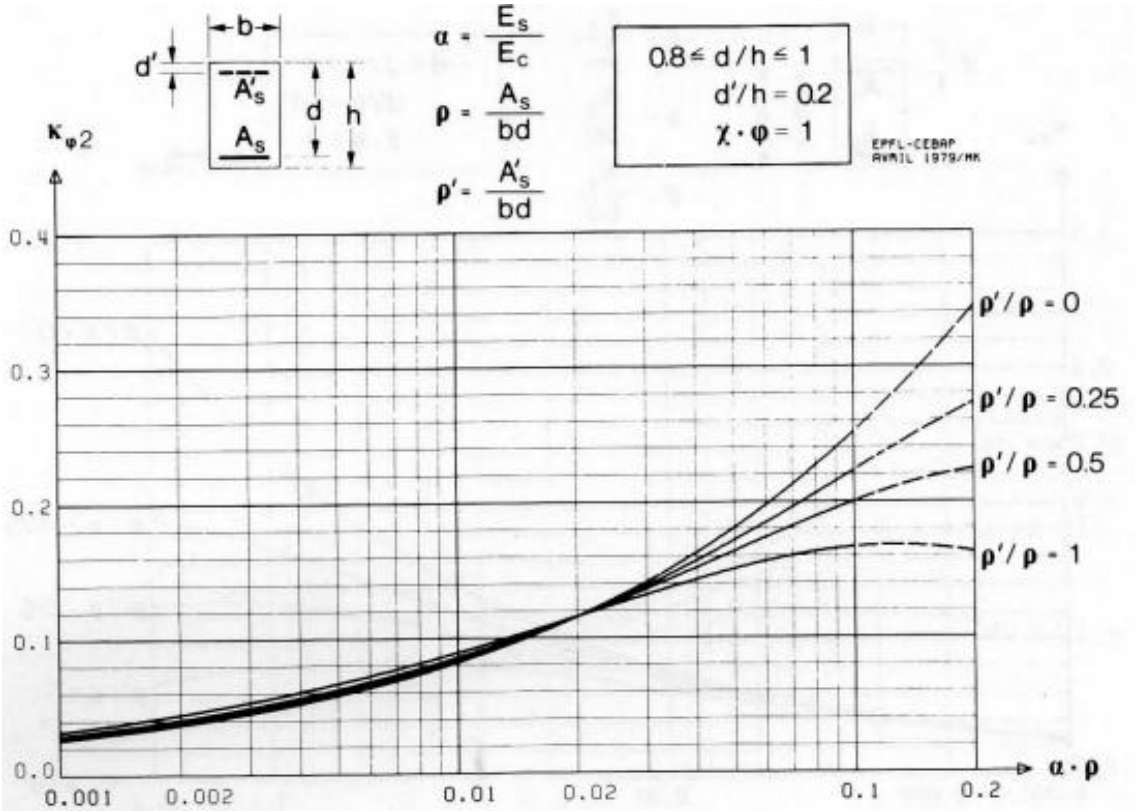


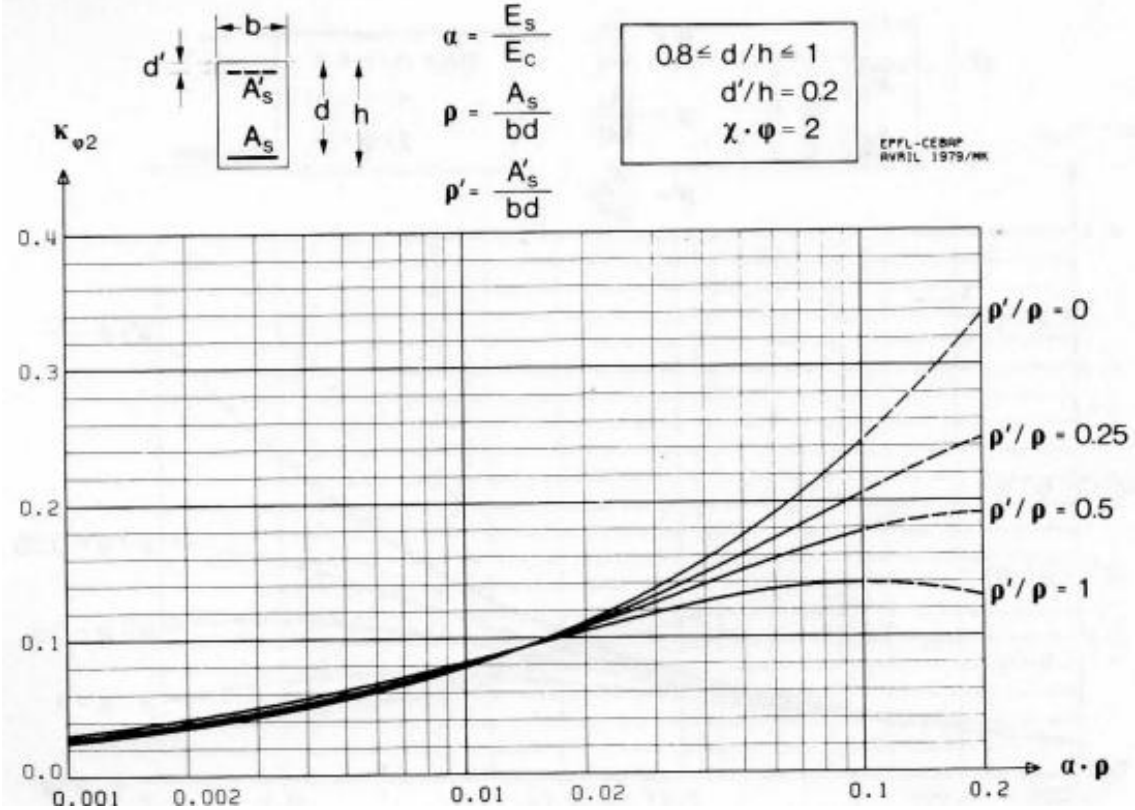
A 2.4 – Coeficiente $k_{\varphi 2}$ – método bilinear [6]



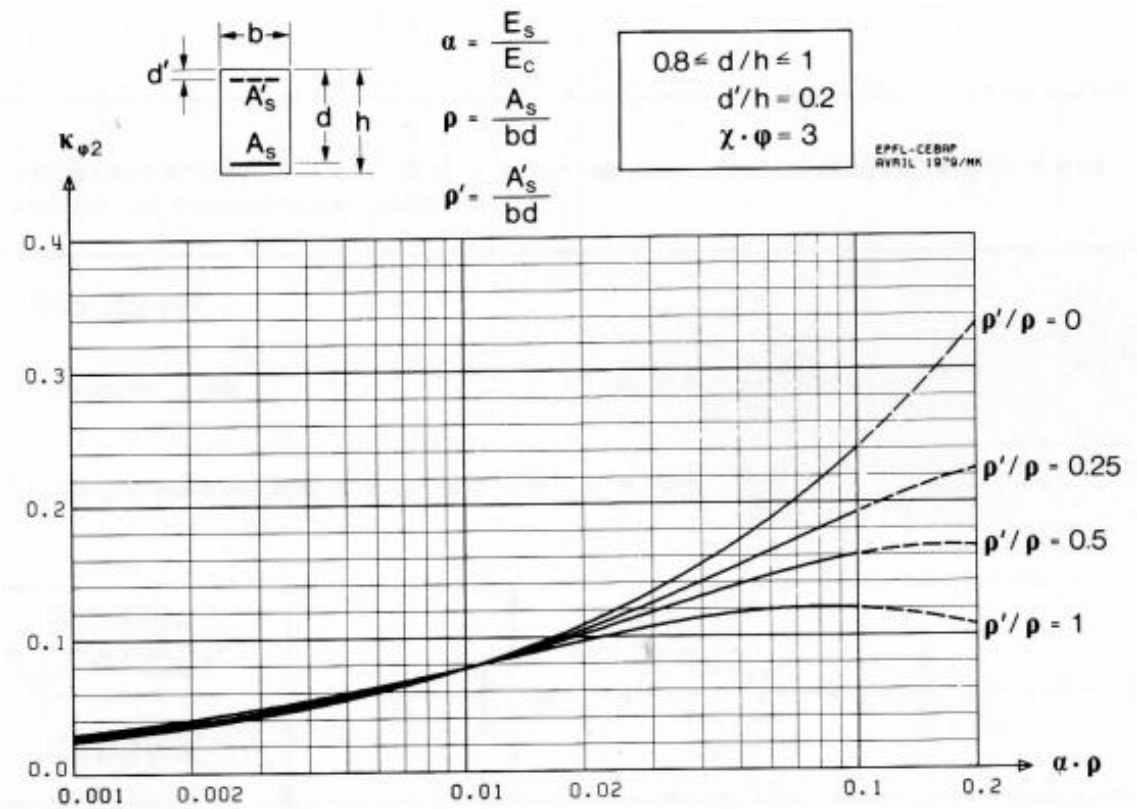


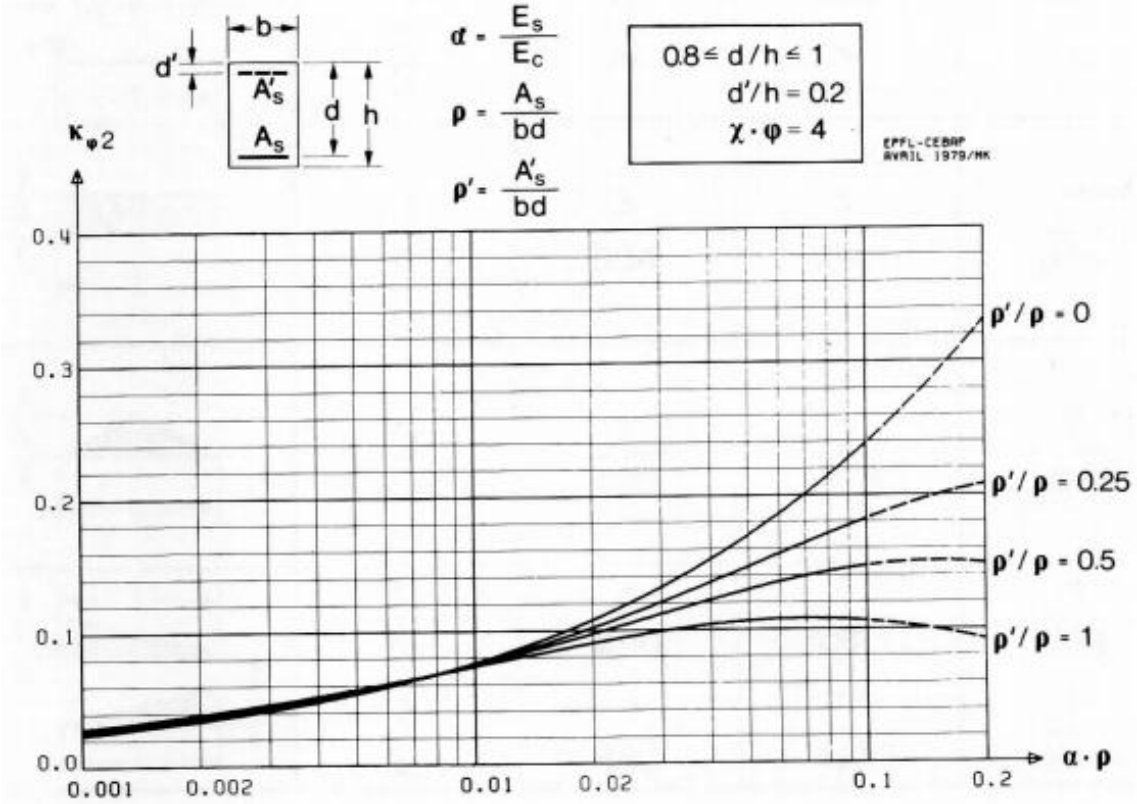
A 2.4 – Coeficiente $k_{\varphi 2}$ – método bilinear [6]



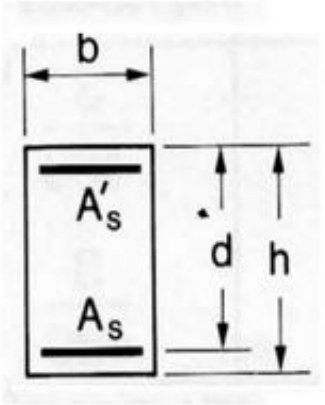


A 2.4 – Coeficiente $k_{\varphi 2}$ – método bilinear [6]



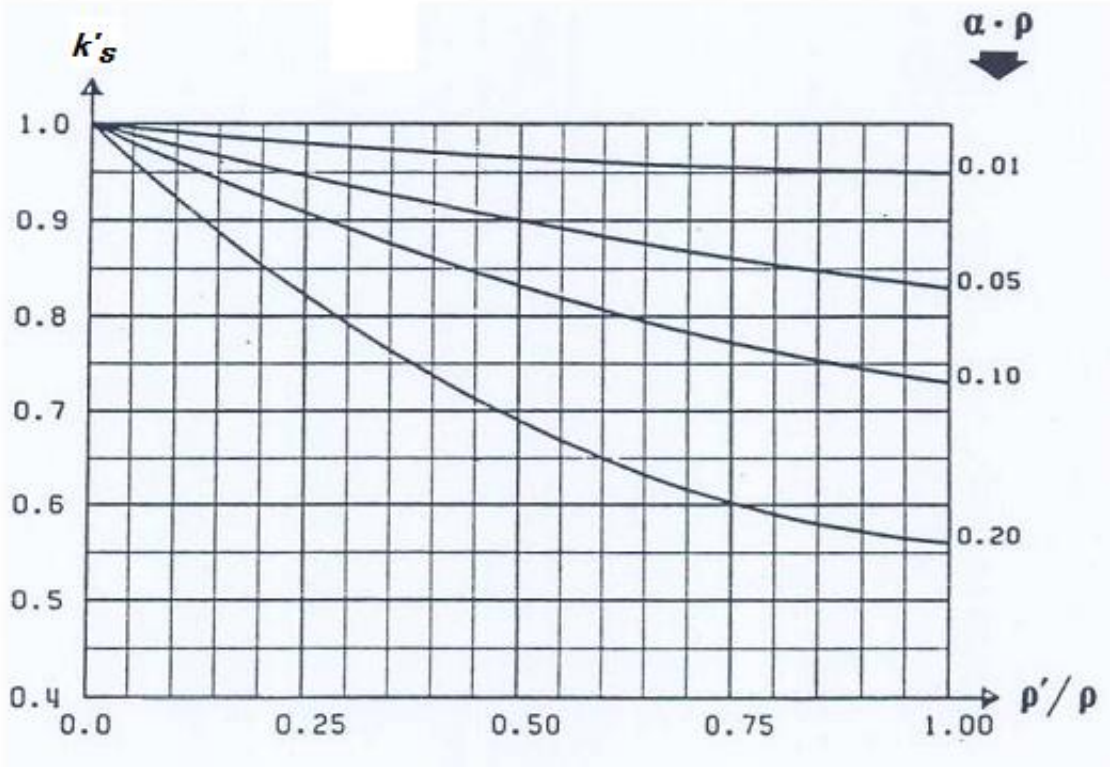


A 3.1 – Coeficiente k'_s – método dos coeficientes globais [6]

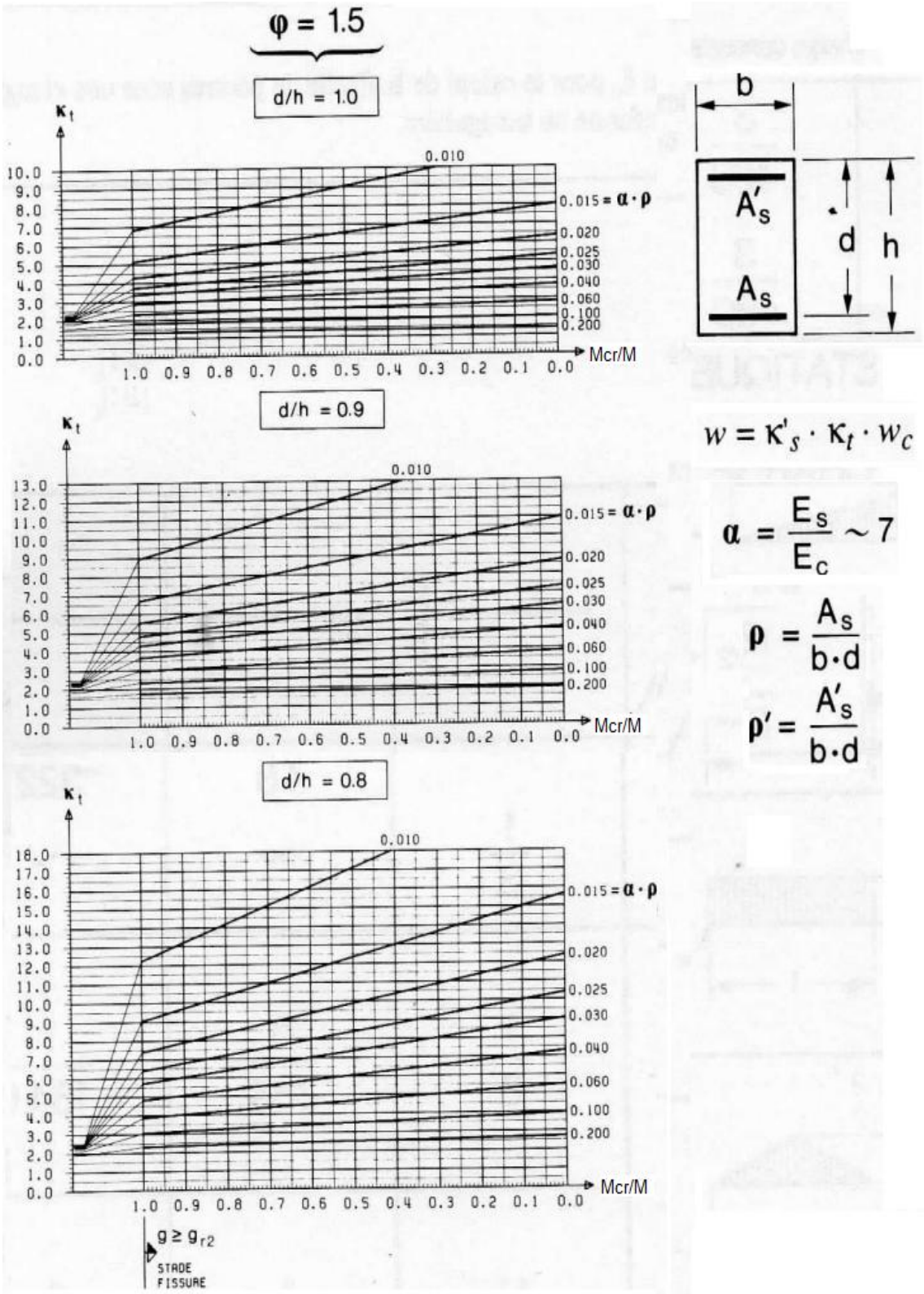


$$w = \kappa'_s \cdot \kappa_t \cdot w_c \qquad \alpha = \frac{E_s}{E_c} \sim 7$$

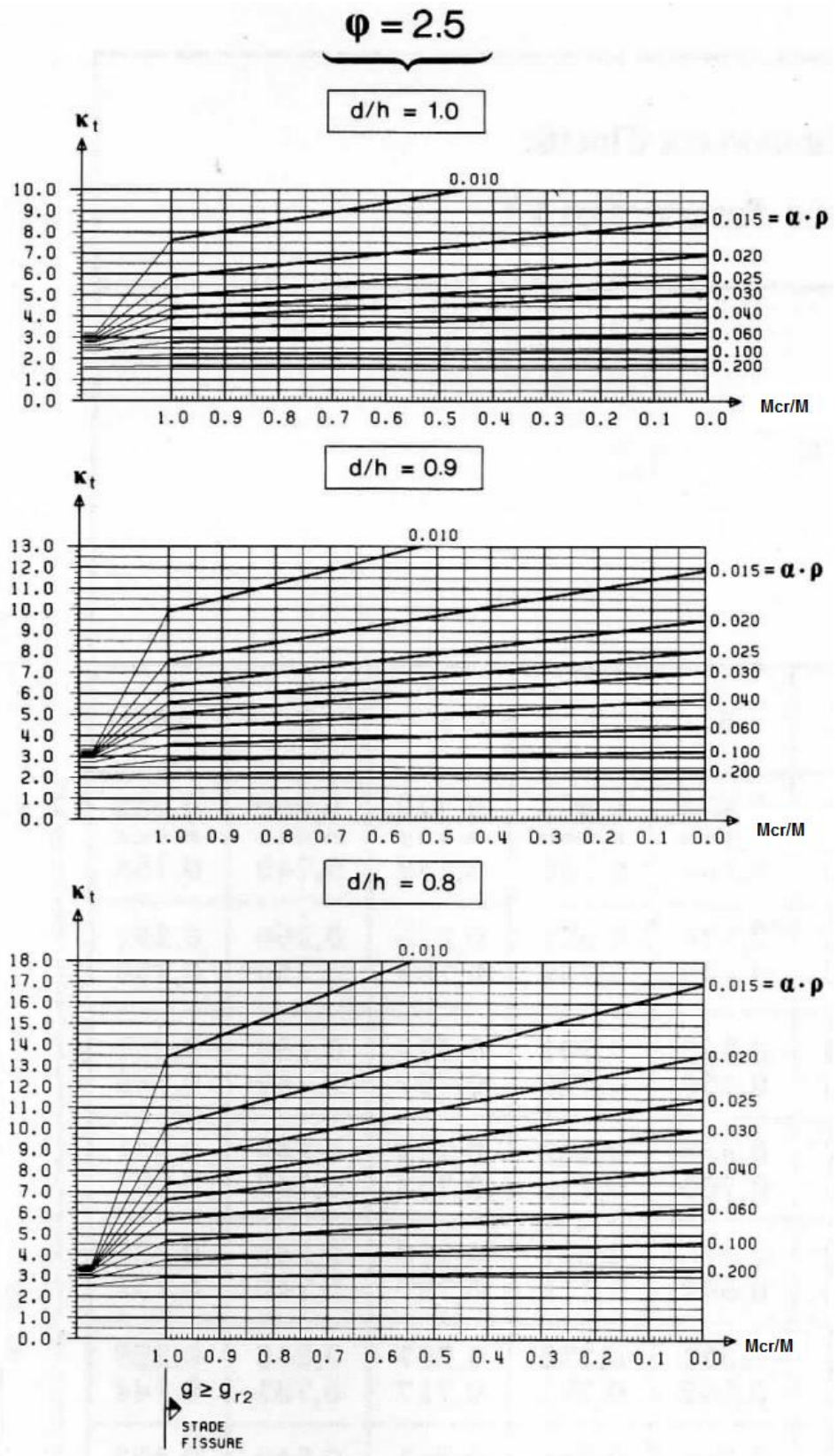
$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \qquad \rho' = \frac{A'_s}{b \cdot d}$$



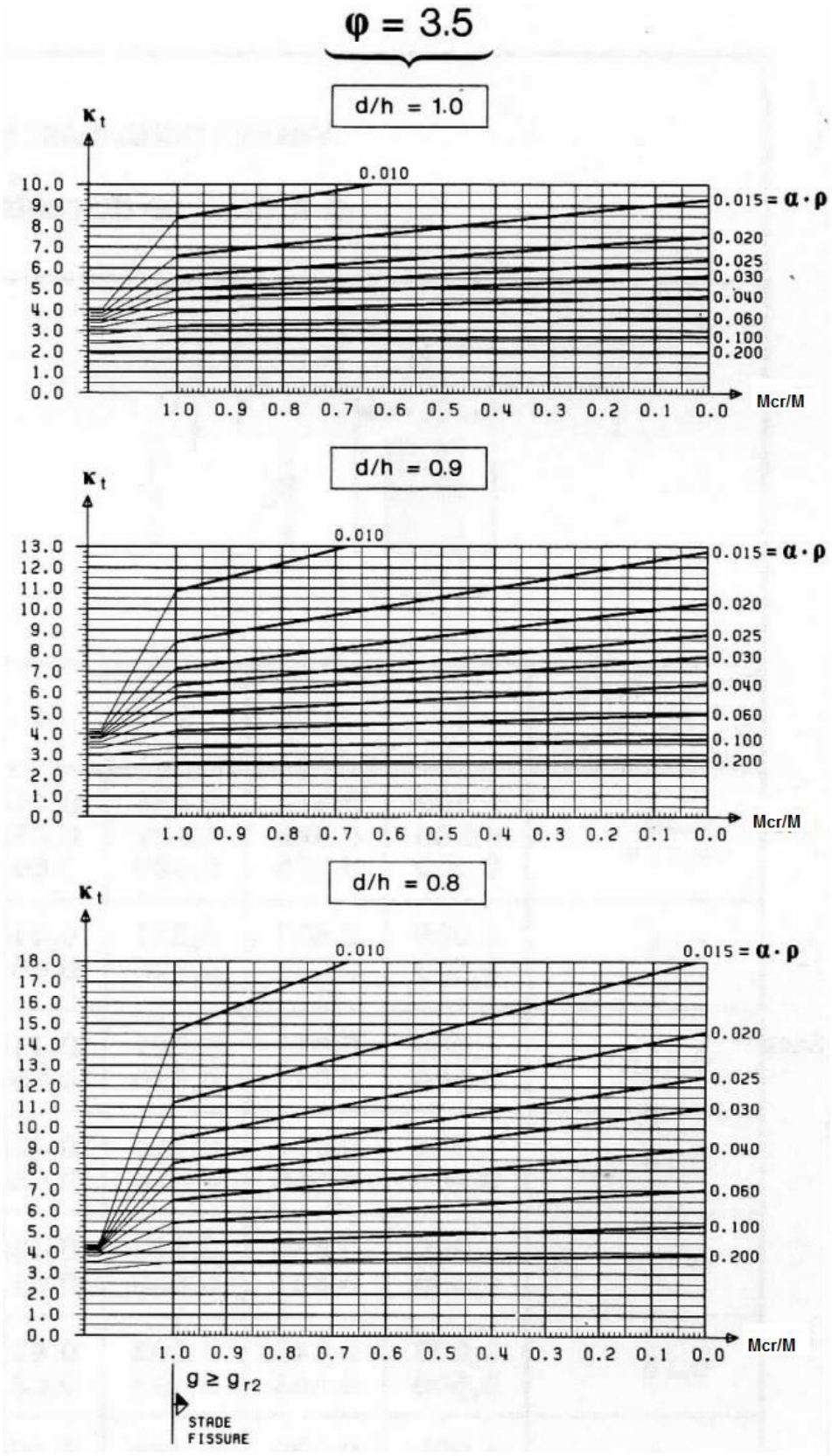
A 3.2 – Coeficiente k_t – método dos coeficientes globais [6]



A 3.2 – Coeficiente k_t – método dos coeficientes globais [6]



A 3.2 – Coeficiente k_t – método dos coeficientes globais [6]



A 4 1 – Caso A – secção retangular

VIGA SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

				bf1=	0.30 m		[cm^2]	Betão	C25/30	Aço	A500
p_{qp} [kN/m] =	44.00 kN/m	L [m]=	6.00 m	bw=		As,ap,esq=	15.71 cm^2	Ecm [Gpa]=	31.0 GPa	Es [Gpa]=	200.0 GPa
φ=	2.5	L/250 [m]=	0.024	bf2=		A's,ap,esq=	3.39 cm^2	fctm [Mpa]=	2.6 MPa		
				hf1=	0.60 m	As,vão=	15.71 cm^2	Mcr=	46.80 kNm		
$M_{ap,esq}$ [kNm]=	0.00 kNm			hw=		A's,vão=	3.39 cm^2	Δ L=	0.6 m		
$M_{ap,drt}$ [kNm]=	0.00 kNm			hf2=		As,ap,drt=	15.71 cm^2	Ic=	0.00540 m^4		
x*=	3.00 m					A's,ap,drt=	3.39 cm^2				

Tabelas e Gráficos do Cálculo da Deformação pelo Método de Integração Numérica

Deformação elástica

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0
M [kNm]	0.00	71.28	126.72	166.32	190.08	198.00	190.08	166.32	126.72	71.28	0.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
E [KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_c [m^4]	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540
$1/EI_c$ [$x10^{-3}$]	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006
$1/r_c$=M/EI_c [$x10^{-3}$]	0.000	0.426	0.757	0.994	1.135	1.183	1.135	0.994	0.757	0.426	0.000
f(i) = **M** *1/rc	0.000	0.128	0.454	0.894	1.363	1.774	1.363	0.894	0.454	0.128	0.000

M(x*)= 198.00 kNm

ac	
[m]	[mm]
0.00451	**4.51 [mm]**

Deformação Instantânea

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04
A's (m^2)	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04
M [kNm]	0.00	71.28	126.72	166.32	190.08	198.00	190.08	166.32	126.72	71.28	0.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
ζ=1-β(M_{cr}/M)^2	0.000	0.569	0.864	0.921	0.939	0.944	0.939	0.921	0.864	0.569	0.000
$E_{c,eff}$ [KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_I [m^4]	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615
I_{II} [m^4]	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	0.000	0.374	0.665	0.872	0.997	1.039	0.997	0.872	0.665	0.374	0.000
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	0.000	1.163	2.067	2.713	3.101	3.230	3.101	2.713	2.067	1.163	0.000
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	0.000	0.823	1.876	2.568	2.974	3.108	2.974	2.568	1.876	0.823	0.000
f(i) = **M** *1/r_m	0.000	0.247	1.126	2.311	3.568	4.662	3.568	2.311	1.126	0.247	0.000

aI,0 =	**3.96 [mm]**
aII,0 =	**12.31 [mm]**

a0	
[m]	[mm]
0.01158	**11.58 [mm]**

Deformação a Longo Prazo

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04
A's (m^2)	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04
M [kNm]	0.00	71.28	126.72	166.32	190.08	198.00	190.08	166.32	126.72	71.28	0.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
ζ=1-β(M_{cr}/M)^2	0.000	0.784	0.932	0.960	0.970	0.972	0.970	0.960	0.932	0.784	0.000
$E_{c,eff}$ [KPa]	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06
I_I [m^4]	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788
I_{II} [m^4]	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	0.000	1.021	1.816	2.383	2.724	2.837	2.724	2.383	1.816	1.021	0.000
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	0.000	1.590	2.827	3.711	4.241	4.417	4.241	3.711	2.827	1.590	0.000
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	0.000	1.468	2.758	3.658	4.195	4.373	4.195	3.658	2.758	1.468	0.000
f(i) = **M** *1/r_m	0.000	0.440	1.655	3.292	5.034	6.560	5.034	3.292	1.655	0.440	0.000

aI,∞ =	**10.81 [mm]**
aII,∞ =	**16.84 [mm]**

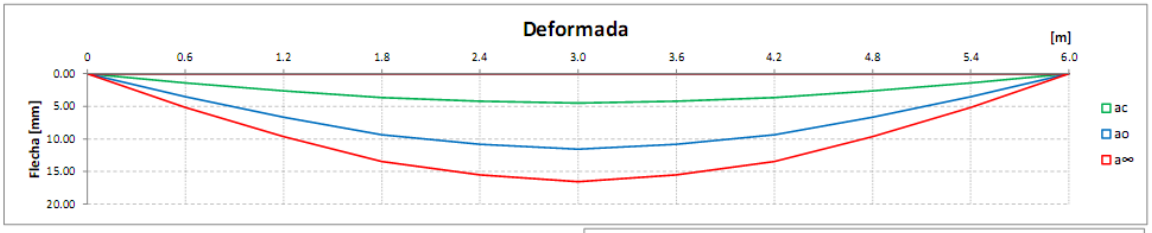
a∞	
[m]	[mm]
0.01657	**16.57 [mm]**

Método da Secção Determinante

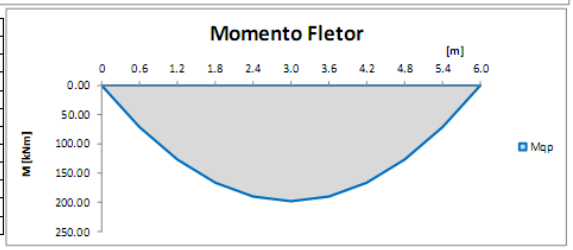
Im,0 =	0.00206 [m^4]
a0 SD =	**11.84 [mm]**
ε= 2.3 %	

Im∞ =	0.00511 [m^4]
a∞ SD =	**16.67 [mm]**
ε= 0.6 %	

<L/250?	OK



x* [m]	ac [mm]	a0 [mm]	a∞ [mm]	Mqp [kNm]
0	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	1.42	3.54	5.18	71.28
1.2	2.63	6.68	9.65	126.72
1.8	3.67	9.37	13.46	166.32
2.4	4.22	10.83	15.52	190.08
3.0	4.51	11.58	16.57	198.00
3.6	4.22	10.83	15.52	190.08
4.2	3.67	9.37	13.46	166.32
4.8	2.63	6.68	9.65	126.72
5.4	1.42	3.54	5.18	71.28
6.0	0.00	0.00	0.00	0.00



A 4 2 – Caso B – secção retangular

VIGA SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

				hf1=	0.30 m		[cm^2]	Betão	C25/30	Aço	A500
p_{ap} [kN/m] =	44.00 kN/m	L [m]=	6.00 m	bw=		As,ap,esq=	15.71 cm^2	Ecm [Gpa]=	31.0 GPa	Es [Gpa]=	200.0 GPa
φ=	2.5	L/250 [m]=	0.024	hf2=		A's,ap,esq=	6.28 cm^2	fctm [Mpa]=	2.6 MPa		
				hf1=	0.60 m	As,vão=	10.30 cm^2	Mcr=	46.80 kNm		
$M_{ap,esq}$ [kNm]=	-198.00 kNm			hw=		A's,vão=	6.28 cm^2	Δ L=	0.6 m		
$M_{ap,drt}$ [kNm]=	0.00 kNm			hf2=		As,ap,drt=	10.30 cm^2	Ic=	0.00540 m^4		
x*=	3.00 m					A's,ap,drt=	6.28 cm^2				

Tabelas e Gráficos do Cálculo da Deformação pelo Método de Integração Numérica

Deformação elástica

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0
M [kNm]	-198.00	-106.92	-31.68	27.72	71.28	99.00	110.88	106.92	87.12	51.48	0.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
E [KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_c [m^4]	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540
$1/EI_c$ [$x10^{-3}$]	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006
$1/r_c$=M/EI_c [$x10^{-3}$]	-1.183	-0.639	-0.189	0.166	0.426	0.591	0.662	0.639	0.520	0.308	0.000
f(i) = M *1/rc	0.000	-0.192	-0.114	0.149	0.511	0.887	0.795	0.575	0.312	0.092	0.000

M(x*)= 99.00 kNm

ac	
[m]	[mm]
0.00181	1.81 [mm]

Deformação Instantânea

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04
A's (m^2)	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04
M [kNm]	-198.00	-106.92	-31.68	27.72	71.28	99.00	110.88	106.92	87.12	51.48	0.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
ζ=1-$\beta(M_{cr}/M)^2$	0.944	0.808	0.000	0.000	0.569	0.777	0.822	0.808	0.711	0.174	0.000
$E_{c,eff}$[KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_I [m^4]	0.00627	0.00627	0.00627	0.00607	0.00607	0.00607	0.00607	0.00607	0.00607	0.00607	0.00607
I_{II} [m^4]	0.00200	0.00200	0.00200	0.00142	0.00142	0.00142	0.00142	0.00142	0.00142	0.00142	0.00142
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-1.018	-0.550	-0.163	0.147	0.379	0.526	0.590	0.569	0.463	0.274	0.000
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-3.196	-1.726	-0.511	0.630	1.621	2.252	2.522	2.432	1.982	1.171	0.000
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-3.075	-1.501	-0.163	0.147	1.086	1.866	2.178	2.075	1.543	0.429	0.000
f(i) = M *1/r_m	0.000	-0.450	-0.098	0.133	1.303	2.799	2.613	1.867	0.926	0.129	0.000

$a_{I,0}$ =	1.62 [mm]
$a_{II,0}$ =	7.12 [mm]

a0	
[m]	[mm]
0.00548	5.48 [mm]

Deformação a Longo Prazo

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04	10.30E-04
A's (m^2)	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04	06.28E-04
M [kNm]	-198.00	-106.92	-31.68	27.72	71.28	99.00	110.88	106.92	87.12	51.48	0.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
ζ=1-$\beta(M_{cr}/M)^2$	0.972	0.904	0.000	0.000	0.784	0.888	0.911	0.904	0.856	0.587	0.000
$E_{c,eff}$[KPa]	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06
I_I [m^4]	0.00838	0.00838	0.00838	0.00772	0.00772	0.00772	0.00772	0.00772	0.00772	0.00772	0.00772
I_{II} [m^4]	0.00530	0.00530	0.00530	0.00397	0.00397	0.00397	0.00397	0.00397	0.00397	0.00397	0.00397
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-2.668	-1.440	-0.427	0.406	1.043	1.448	1.622	1.564	1.275	0.753	0.000
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-4.216	-2.277	-0.675	0.788	2.027	2.816	3.154	3.041	2.478	1.464	0.000
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-4.173	-2.197	-0.427	0.406	1.815	2.663	3.017	2.900	2.304	1.170	0.000
f(i) = M *1/r_m	0.000	-0.659	-0.256	0.365	2.178	3.994	3.621	2.610	1.383	0.351	0.000

$a_{I,\infty}$ =	4.47 [mm]
$a_{II,\infty}$ =	8.86 [mm]

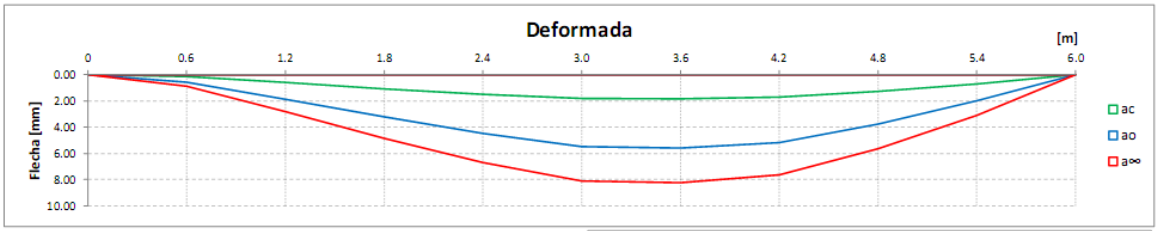
a∞	
[m]	[mm]
0.00810	8.10 [mm]

Método da Secção Determinante

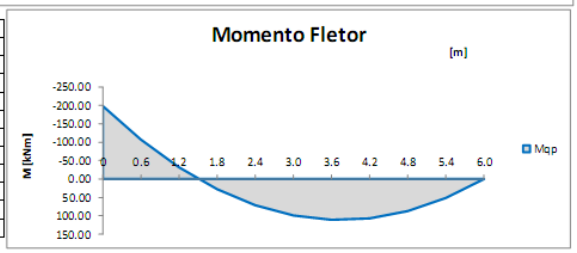
Im,0 =	0.00171 [m^4]
a0 SD =	5.71 [mm]
	ε= 4.3 %

Im∞ =	0.00420 [m^4]
a∞ SD =	8.16 [mm]
	ε= 0.7 %

<L/250?	OK



x* [m]	ac [mm]	a0 [mm]	a∞ [mm]	Mqp [kNm]
0	0.00	0.00	0.00	-198.00
0.6	0.14	0.58	0.88	-106.92
1.2	0.59	1.87	2.81	-31.68
1.8	1.08	3.21	4.85	27.72
2.4	1.50	4.48	6.69	71.28
3.0	1.81	5.48	8.10	99.00
3.6	1.84	5.59	8.23	110.88
4.2	1.71	5.18	7.63	106.92
4.8	1.27	3.77	5.64	87.12
5.4	0.71	1.99	3.10	51.48
6.0	0.00	0.00	0.00	0.00



A 4 3 – Caso C – secção retangular

VIGA SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

				hf1=	0.30 m		[cm^2]	Betão	C25/30	Aço	A500
p_{qp} [kN/m] =	44.00 kN/m	L [m]=	6.00 m	bw=		As,ap,esq=	10.05 cm^2	Ecm [Gpa]=	31.0 GPa	Es [Gpa]=	200.0 GPa
φ=	2.5	L/250 [m]=	0.024	hf2=		A's,ap,esq=	4.02 cm^2	fctm [Mpa]=	2.6 MPa		
				hf1=	0.60 m	As,vão=	6.03 cm^2	Mcr=	46.80 kNm		
$M_{ap,esq}$ [kNm]=	-132.00 kNm			hw=		A's,vão=	4.02 cm^2	Δ L=	0.6 m		
$M_{ap,drt}$ [kNm]=	-132.00 kNm			hf2=		As,ap,drt=	10.05 cm^2	Ic=	0.00540 m^4		
x*=	3.00 m					A's,ap,drt=	4.02 cm^2				

Tabelas e Gráficos do Cálculo da Deformação pelo Método de Integração Numérica

Deformação elástica

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0
M [kNm]	-132.00	-60.72	-5.28	34.32	58.08	66.00	58.08	34.32	-5.28	-60.72	-132.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
E [KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_c [m^4]	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540
$1/EI_c$ [$x10^{-3}$]	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006
$1/r_c$=M/EI_c [$x10^{-3}$]	-0.789	-0.363	-0.032	0.205	0.347	0.394	0.347	0.205	-0.032	-0.363	-0.789
f(i) = M *1/rc	0.000	-0.109	-0.019	0.185	0.416	0.591	0.416	0.185	-0.019	-0.109	0.000

M(x*)= 66.00 kNm

ac	
[m]	[mm]
0.00091	**0.91 [mm]**

Deformação Instantânea

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04
A's (m^2)	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04
M [kNm]	-132.00	-60.72	-5.28	34.32	58.08	66.00	58.08	34.32	-5.28	-60.72	-132.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
ζ=1-$\beta(M_{cr}/M)^2$	0.874	0.406	0.000	0.000	0.351	0.497	0.351	0.000	0.000	0.406	0.874
$E_{c,eff}$[KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_I [m^4]	0.00596	0.00596	0.00596	0.00580	0.00580	0.00580	0.00580	0.00580	0.00596	0.00596	0.00596
I_{II} [m^4]	0.00138	0.00138	0.00138	0.00089	0.00089	0.00089	0.00089	0.00089	0.00138	0.00138	0.00138
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-0.714	-0.329	-0.029	0.191	0.323	0.367	0.323	0.191	-0.029	-0.329	-0.714
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-3.085	-1.419	-0.123	1.238	2.095	2.381	2.095	1.238	-0.123	-1.419	-3.085
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-2.787	-0.771	-0.029	0.191	0.944	1.368	0.944	0.191	-0.029	-0.771	-2.787
f(i) = M *1/r_m	0.000	-0.231	-0.017	0.172	1.133	2.052	1.133	0.172	-0.017	-0.231	0.000

$a_{I,0}$ =	**0.85 [mm]**
$a_{II,0}$ =	**5.91 [mm]**

a0	
[m]	[mm]
0.00244	**2.44 [mm]**

Deformação a Longo Prazo

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04
A's (m^2)	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04
M [kNm]	-132.00	-60.72	-5.28	34.32	58.08	66.00	58.08	34.32	-5.28	-60.72	-132.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
ζ=1-$\beta(M_{cr}/M)^2$	0.937	0.703	0.000	0.000	0.675	0.749	0.675	0.000	0.000	0.703	0.937
$E_{c,eff}$[KPa]	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06
I_I [m^4]	0.00733	0.00733	0.00733	0.00681	0.00681	0.00681	0.00681	0.00681	0.00733	0.00733	0.00733
I_{II} [m^4]	0.00378	0.00378	0.00378	0.00259	0.00259	0.00259	0.00259	0.00259	0.00378	0.00378	0.00378
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-2.033	-0.935	-0.081	0.569	0.963	1.094	0.963	0.569	-0.081	-0.935	-2.033
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-3.941	-1.813	-0.158	1.497	2.534	2.879	2.534	1.497	-0.158	-1.813	-3.941
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-3.821	-1.552	-0.081	0.569	2.024	2.430	2.024	0.569	-0.081	-1.552	-3.821
f(i) = M *1/r_m	0.000	-0.466	-0.049	0.512	2.428	3.646	2.428	0.512	-0.049	-0.466	0.000

$a_{I,\infty}$ =	**2.57 [mm]**
$a_{II,\infty}$ =	**7.10 [mm]**

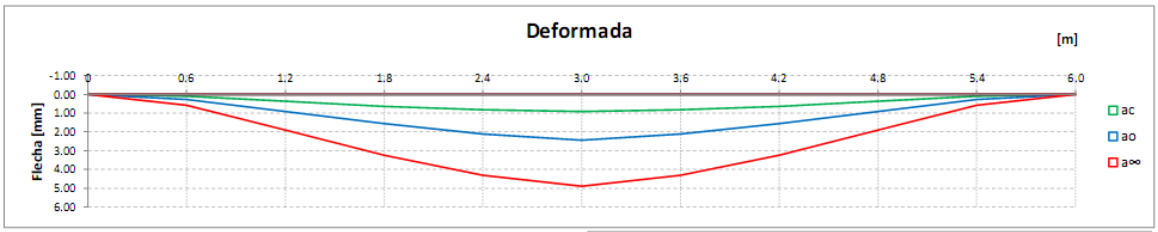
a∞	
[m]	[mm]
0.00489	**4.89 [mm]**

Método da Secção Determinante

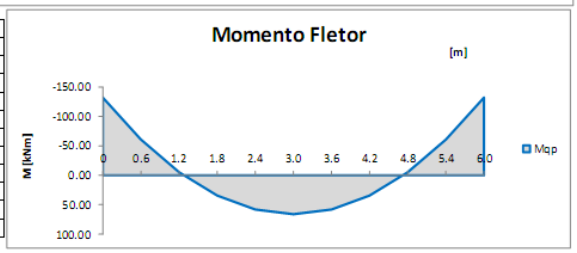
$I_{m,0}$ =	0.00156 [m^4]
a0 SD =	**3.17 [mm]**
ε=	29.8 %

$I_{m\infty}$ =	0.00307 [m^4]
a∞ SD =	**5.62 [mm]**
ε=	14.9 %

<L/250? OK



x* [m]	ac [mm]	a0 [mm]	a∞ [mm]	Mqp [kNm]
0	0.00	0.00	0.00	-132.00
0.6	0.09	0.27	0.58	-60.72
1.2	0.36	0.91	1.90	-5.28
1.8	0.64	1.56	3.24	34.32
2.4	0.82	2.11	4.31	58.08
3.0	0.91	2.44	4.89	66.00
3.6	0.82	2.11	4.31	58.08
4.2	0.64	1.56	3.24	34.32
4.8	0.36	0.91	1.90	-5.28
5.4	0.09	0.27	0.58	-60.72
6.0	0.00	0.00	0.00	-132.00



A 4 4 – Caso C – secção em T

VIGA SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

				bf1=	2.00 m		[cm^2]	Betão	C25/30	Aço	A500
p_{qp} [kN/m] =	44.00 kN/m	L [m]=	6.00 m	bw=	0.25 m	As,ap,esq=	10.05 cm^2	Ecm [Gpa]=	31.0 GPa	Es [Gpa]=	200.0 GPa
φ=	2.5	L/250 [m]=	0.024	bf2=		A's,ap,esq=	4.02 cm^2	fctm [Mpa]=	2.6 MPa		
				hf1=	0.20 m	As,vão=	6.03 cm^2	Mcr=	58.30 kNm		
$M_{ap,esq}$ [kNm]=	-132.00 kNm			hw=	0.40 m	A's,vão=	4.02 cm^2	Δ L=	0.6 m		
$M_{ap,drt}$ [kNm]=	-132.00 kNm			hf2=		As,ap,drt=	10.05 cm^2	Ic=	0.00987 m^4		
x*=	3.00 m					A's,ap,drt=	4.02 cm^2				

Tabelas e Gráficos do Cálculo da Deformação pelo Método de Integração Numérica

Deformação elástica

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0
M [kNm]	-132.00	-60.72	-5.28	34.32	58.08	66.00	58.08	34.32	-5.28	-60.72	-132.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
E [KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_c [m^4]	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987
$1/EI_c$ [$x10^{-3}$]	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
$1/r_c=M/EI_c$ [$x10^{-3}$]	-0.432	-0.199	-0.017	0.112	0.190	0.216	0.190	0.112	-0.017	-0.199	-0.432
f(i) = M *1/rc	0.000	-0.060	-0.010	0.101	0.228	0.324	0.228	0.101	-0.010	-0.060	0.000

M(x*)= 66.00 kNm

ac	
[m]	[mm]
0.00050	**0.50 [mm]**

Deformação Instantânea

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04
A's (m^2)	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04
M [kNm]	-132.00	-60.72	-5.28	34.32	58.08	66.00	58.08	34.32	-5.28	-60.72	-132.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
$\zeta=1-\beta(M_{cr}/M)^2$	0.805	0.078	0.000	0.000	0.000	0.220	0.000	0.000	0.000	0.078	0.805
$E_{c,eff}$[KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_I [m^4]	0.01034	0.01034	0.01034	0.01049	0.01049	0.01049	0.01049	0.01049	0.01034	0.01034	0.01034
I_{II} [m^4]	0.00134	0.00134	0.00134	0.00105	0.00105	0.00105	0.00105	0.00105	0.00134	0.00134	0.00134
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-0.412	-0.189	-0.016	0.106	0.179	0.203	0.179	0.106	-0.016	-0.189	-0.412
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-3.178	-1.462	-0.127	1.051	1.779	2.021	1.779	1.051	-0.127	-1.462	-3.178
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-2.638	-0.289	-0.016	0.106	0.179	0.602	0.179	0.106	-0.016	-0.289	-2.638
f(i) = M *1/r_m	0.000	-0.087	-0.010	0.095	0.214	0.904	0.214	0.095	-0.010	-0.087	0.000

aI,0 =	**0.47 [mm]**
aII,0 =	**4.88 [mm]**

a0	
[m]	[mm]
0.00090	**0.90 [mm]**

Deformação a Longo Prazo

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04
A's (m^2)	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04
M [kNm]	-132.00	-60.72	-5.28	34.32	58.08	66.00	58.08	34.32	-5.28	-60.72	-132.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
$\zeta=1-\beta(M_{cr}/M)^2$	0.902	0.539	0.000	0.000	0.000	0.610	0.000	0.000	0.000	0.539	0.902
$E_{c,eff}$[KPa]	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06
I_I [m^4]	0.01152	0.01152	0.01152	0.01201	0.01201	0.01201	0.01201	0.01201	0.01152	0.01152	0.01152
I_{II} [m^4]	0.00362	0.00362	0.00362	0.00336	0.00336	0.00336	0.00336	0.00336	0.00362	0.00362	0.00362
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-1.294	-0.595	-0.052	0.323	0.546	0.620	0.546	0.323	-0.052	-0.595	-1.294
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-4.115	-1.893	-0.165	1.154	1.953	2.219	1.953	1.154	-0.165	-1.893	-4.115
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-3.840	-1.295	-0.052	0.323	0.546	1.595	0.546	0.323	-0.052	-1.295	-3.840
f(i) = M *1/r_m	0.000	-0.388	-0.031	0.290	0.655	2.393	0.655	0.290	-0.031	-0.388	0.000

aI,∞ =	**1.42 [mm]**
aII,∞ =	**5.21 [mm]**

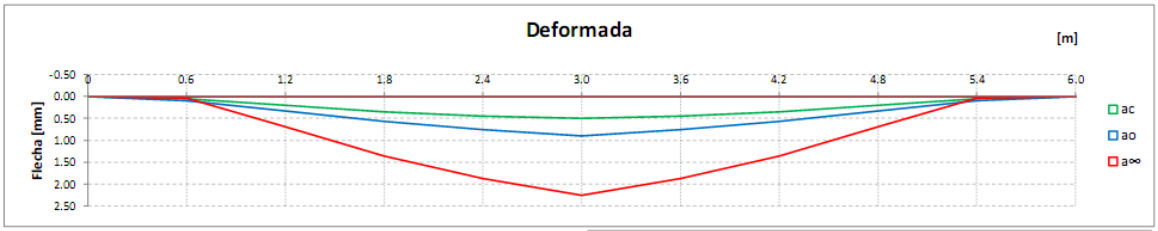
a∞	
[m]	[mm]
0.00226	**2.26 [mm]**

Método da Secção Determinante

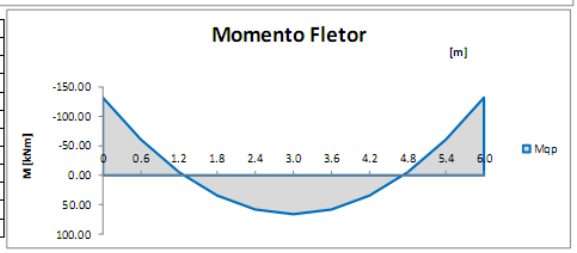
Im,0 =	0.00353 [m^4]
a0 SD =	**1.39 [mm]**
ε=	54.9 %

Im∞ =	0.00467 [m^4]
a∞ SD =	**3.69 [mm]**
ε=	63.6 %

<L/250?	OK



x* [m]	ac [mm]	a0 [mm]	a∞ [mm]	Mqp [kNm]
0	0.00	0.00	0.00	-132.00
0.6	0.05	0.10	0.03	-60.72
1.2	0.20	0.33	0.69	-5.28
1.8	0.35	0.57	1.36	34.32
2.4	0.45	0.76	1.87	58.08
3.0	0.50	0.90	2.26	66.00
3.6	0.45	0.76	1.87	58.08
4.2	0.35	0.57	1.36	34.32
4.8	0.20	0.33	0.69	-5.28
5.4	0.05	0.10	0.03	-60.72
6.0	0.00	0.00	0.00	-132.00



A 4 5 – Caso D – secção retangular

VIGA SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

				bf1=	0.30 m		[cm^2]	Betão	C25/30	Aço	A500
p_{ap} [kN/m] =	44.00 kN/m	L [m]=	6.00 m	bw=		As,ap,esq=	6.03 cm^2	Ecm [Gpa]=	31.0 GPa	Es [Gpa]=	200.0 GPa
φ=	2.5	L/250 [m]=	0.024	bf2=		A's,ap,esq=	6.03 cm^2	fctm [Mpa]=	2.6 MPa		
				hf1=	0.60 m	As,vão=	10.05 cm^2	Mcr=	46.80 kNm		
$M_{ap,esq}$ [kNm]=	-66.00 kNm			hw=		A's,vão=	4.02 cm^2	Δ L=	0.6 m		
$M_{ap,drt}$ [kNm]=	-66.00 kNm			hf2=		As,ap,drt=	6.03 cm^2	Ic=	0.00540 m^4		
x*=	3.00 m					A's,ap,drt=	6.03 cm^2				

Tabelas e Gráficos do Cálculo da Deformação pelo Método de Integração Numérica

Deformação elástica

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0
M [kNm]	-66.00	5.28	60.72	100.32	124.08	132.00	124.08	100.32	60.72	5.28	-66.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
E [KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_c [m^4]	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540
$1/EI_c$ [$x10^{-3}$]	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006
$1/r_c=M/EI_c$ [$x10^{-3}$]	-0.394	0.032	0.363	0.599	0.741	0.789	0.741	0.599	0.363	0.032	-0.394
f(i) = M *1/rc	0.000	0.009	0.218	0.539	0.889	1.183	0.889	0.539	0.218	0.009	0.000

M(x*)= 132.00 kNm

ac	
[m]	[mm]
0.00271	2.71 [mm]

Deformação Instantânea

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
A's (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
M [kNm]	-66.00	5.28	60.72	100.32	124.08	132.00	124.08	100.32	60.72	5.28	-66.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
$\zeta=1-\beta(M_{cr}/M)^2$	0.497	0.000	0.406	0.782	0.858	0.874	0.858	0.782	0.406	0.000	0.497
$E_{c,eff}$[KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_I [m^4]	0.00589	0.00596	0.00596	0.00596	0.00596	0.00596	0.00596	0.00596	0.00596	0.00596	0.00589
I_{II} [m^4]	0.00090	0.00138	0.00138	0.00138	0.00138	0.00138	0.00138	0.00138	0.00138	0.00138	0.00090
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-0.362	0.029	0.329	0.543	0.671	0.714	0.671	0.543	0.329	0.029	-0.362
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-2.372	0.123	1.419	2.344	2.900	3.085	2.900	2.344	1.419	0.123	-2.372
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-1.361	0.029	0.771	1.952	2.583	2.787	2.583	1.952	0.771	0.029	-1.361
f(i) = M *1/r_m	0.000	0.009	0.463	1.757	3.099	4.180	3.099	1.757	0.463	0.009	0.000

aI,0 =	2.45 [mm]
aII,0 =	10.60 [mm]

a0	
[m]	[mm]
0.00902	9.02 [mm]

Deformação a Longo Prazo

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
A's (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
M [kNm]	-66.00	5.28	60.72	100.32	124.08	132.00	124.08	100.32	60.72	5.28	-66.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
$\zeta=1-\beta(M_{cr}/M)^2$	0.749	0.000	0.703	0.891	0.929	0.937	0.929	0.891	0.703	0.000	0.749
$E_{c,eff}$[KPa]	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06
I_I [m^4]	0.00710	0.00733	0.00733	0.00733	0.00733	0.00733	0.00733	0.00733	0.00733	0.00733	0.00710
I_{II} [m^4]	0.00265	0.00378	0.00378	0.00378	0.00378	0.00378	0.00378	0.00378	0.00378	0.00378	0.00265
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-1.049	0.081	0.935	1.545	1.911	2.033	1.911	1.545	0.935	0.081	-1.049
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-2.816	0.158	1.813	2.995	3.705	3.941	3.705	2.995	1.813	0.158	-2.816
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-2.372	0.081	1.552	2.837	3.577	3.821	3.577	2.837	1.552	0.081	-2.372
f(i) = M *1/r_m	0.000	0.024	0.931	2.554	4.292	5.732	4.292	2.554	0.931	0.024	0.000

aI,∞ =	6.99 [mm]
aII,∞ =	13.54 [mm]

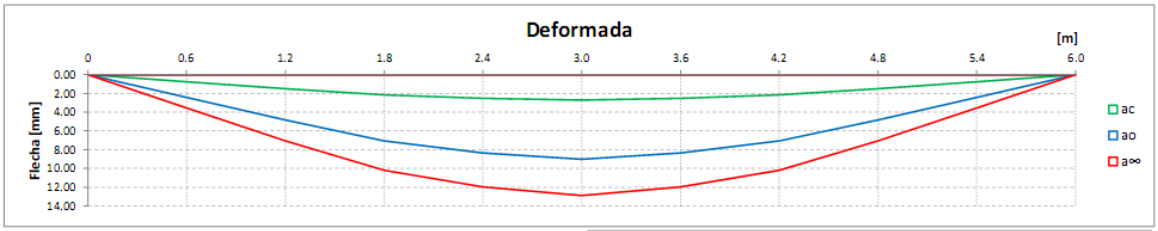
a∞	
[m]	[mm]
0.01289	12.89 [mm]

Método da Secção Determinante

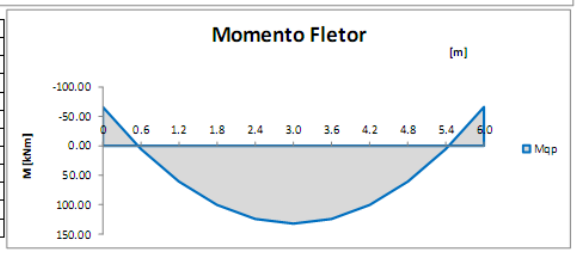
Im,0 =	0.00153 [m^4]
a0 SD =	9.58 [mm]
	ε= 6.2 %

Im∞ =	0.00390 [m^4]
a∞ SD =	13.13 [mm]
	ε= 1.9 %

<L/250?	OK



x* [m]	ac [mm]	a0 [mm]	a∞ [mm]	Mqp [kNm]
0	0.00	0.00	0.00	-66.00
0.6	0.76	2.42	3.55	5.28
1.2	1.50	4.84	7.06	60.72
1.8	2.15	7.06	10.20	100.32
2.4	2.52	8.35	11.97	124.08
3.0	2.71	9.02	12.89	132.00
3.6	2.52	8.35	11.97	124.08
4.2	2.15	7.06	10.20	100.32
4.8	1.50	4.84	7.06	60.72
5.4	0.76	2.42	3.55	5.28
6.0	0.00	0.00	0.00	-66.00



A 4 6 – Caso D – secção em T

VIGA SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

				bf1=	2.00 m		[cm^2]	Betão	C25/30	Aço	A500
p_{ap} [kN/m] =	44.00 kN/m	L [m]=	6.00 m	bw=	0.25 m	As,ap,esq=	6.03 cm^2	Ecm [Gpa]=	31.0 GPa	Es [Gpa]=	200.0 GPa
φ=	2.5	L/250 [m]=	0.024	bf2=		A's,ap,esq=	6.03 cm^2	fctm [Mpa]=	2.6 MPa		
				hf1=	0.20 m	As,vão=	10.05 cm^2	Mcr=	58.30 kNm		
$M_{ap,esq}$ [kNm]=	-66.00 kNm			hw=	0.40 m	A's,vão=	4.02 cm^2	Δ L=	0.6 m		
$M_{ap,drt}$ [kNm]=	-66.00 kNm			hf2=		As,ap,drt=	6.03 cm^2	Ic=	0.00987 m^4		
x*=	3.00 m					A's,ap,drt=	6.03 cm^2				

Tabelas e Gráficos do Cálculo da Deformação pelo Método de Integração Numérica

Deformação elástica

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0
M [kNm]	-66.00	5.28	60.72	100.32	124.08	132.00	124.08	100.32	60.72	5.28	-66.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
E [KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_c [m^4]	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987	0.00987
$1/EI_c$ [$x10^{-3}$]	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
$1/r_c$=M/EI_c [$x10^{-3}$]	-0.216	0.017	0.199	0.328	0.406	0.432	0.406	0.328	0.199	0.017	-0.216
f(i) = **M** *1/rc	0.000	0.005	0.119	0.295	0.487	0.647	0.487	0.295	0.119	0.005	0.000

M(x*)= 132.00 kNm

ac	
[m]	[mm]
0.00148	**1.48 [mm]**

Deformação Instantânea

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
A's (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
M [kNm]	-66.00	5.28	60.72	100.32	124.08	132.00	124.08	100.32	60.72	5.28	-66.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
ζ=1-β(M_{cr}/M)^2	0.220	0.000	0.078	0.662	0.779	0.805	0.779	0.662	0.078	0.000	0.220
$E_{c,eff}$[KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_I [m^4]	0.01050	0.01087	0.01087	0.01087	0.01087	0.01087	0.01087	0.01087	0.01087	0.01087	0.01050
I_{II} [m^4]	0.00088	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00088
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-0.203	0.016	0.180	0.298	0.368	0.392	0.368	0.298	0.180	0.016	-0.203
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-2.424	0.100	1.152	1.904	2.355	2.505	2.355	1.904	1.152	0.100	-2.424
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-0.691	0.016	0.256	1.361	1.916	2.093	1.916	1.361	0.256	0.016	-0.691
f(i) = **M** *1/r_m	0.000	0.005	0.154	1.225	2.299	3.139	2.299	1.225	0.154	0.005	0.000

aI,0 =	**1.35 [mm]**
aII,0 =	**8.61 [mm]**

a0	
[m]	[mm]
0.00644	**6.44 [mm]**

Deformação a Longo Prazo

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
A's (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
M [kNm]	-66.00	5.28	60.72	100.32	124.08	132.00	124.08	100.32	60.72	5.28	-66.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
ζ=1-β(M_{cr}/M)^2	0.610	0.000	0.539	0.831	0.890	0.902	0.890	0.831	0.539	0.000	0.610
$E_{c,eff}$[KPa]	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06
I_I [m^4]	0.01208	0.01331	0.01331	0.01331	0.01331	0.01331	0.01331	0.01331	0.01331	0.01331	0.01208
I_{II} [m^4]	0.00257	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00257
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-0.617	0.045	0.515	0.851	1.052	1.119	1.052	0.851	0.515	0.045	-0.617
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-2.897	0.113	1.297	2.143	2.650	2.819	2.650	2.143	1.297	0.113	-2.897
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-2.007	0.045	0.936	1.925	2.474	2.654	2.474	1.925	0.936	0.045	-2.007
f(i) = **M** *1/r_m	0.000	0.013	0.562	1.732	2.969	3.980	2.969	1.732	0.562	0.013	0.000

aI,∞ =	**3.85 [mm]**
aII,∞ =	**9.69 [mm]**

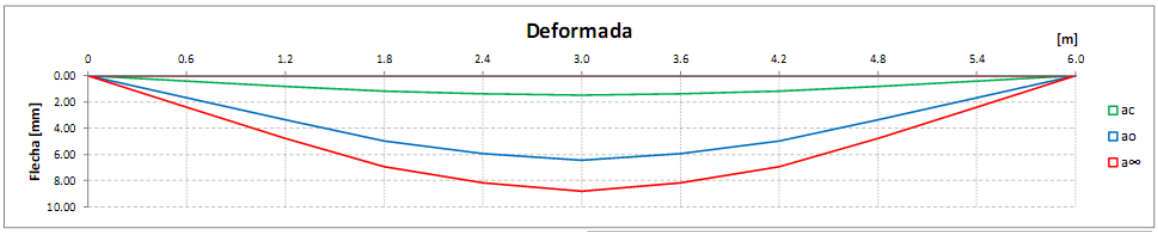
a∞	
[m]	[mm]
0.00880	**8.80 [mm]**

Método da Secção Determinante

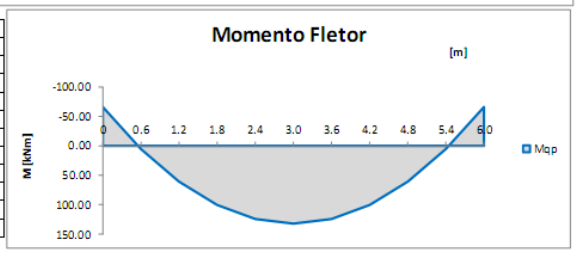
Im,0 =	0.00203 [m^4]
a0 SD =	**7.19 [mm]**
	ε= 11.7 %

Im∞ =	0.00562 [m^4]
a∞ SD =	**9.12 [mm]**
	ε= 3.6 %

<L/250?	**OK**



x* [m]	ac [mm]	a0 [mm]	a∞ [mm]	Mqp [kNm]
0	0.00	0.00	0.00	-66.00
0.6	0.41	1.68	2.40	5.28
1.2	0.82	3.36	4.78	60.72
1.8	1.18	4.98	6.93	100.32
2.4	1.38	5.94	8.16	124.08
3.0	1.48	6.44	8.80	132.00
3.6	1.38	5.94	8.16	124.08
4.2	1.18	4.98	6.93	100.32
4.8	0.82	3.36	4.78	60.72
5.4	0.41	1.68	2.40	5.28
6.0	0.00	0.00	0.00	-66.00



A 4 7 – Caso D – secção em I

VIGA SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

				bf1=	2.00 m		[cm^2]	Betão	C25/30	Aço	A500
p_{ap} [kN/m] =	44.00 kN/m	L [m]=	6.00 m	bw=	0.25 m	As,ap,esq=	6.03 cm^2	Ecm [Gpa]=	31.0 GPa	Es [Gpa]=	200.0 GPa
φ=	2.5	L/250 [m]=	0.024	bf2=	0.65 m	A's,ap,esq=	6.03 cm^2	fctm [Mpa]=	2.6 MPa		
				hf1=	0.20 m	As,vão=	10.05 cm^2	Mcr=	119.75 kNm		
$M_{ap,esq}$ [kNm]=	-66.00 kNm			hw=	0.20 m	A's,vão=	4.02 cm^2	Δ L=	0.6 m		
$M_{ap,drt}$ [kNm]=	-66.00 kNm			hf2=	0.20 m	As,ap,drt=	6.03 cm^2	Ic=	0.01811 m^4		
x*=	3.00 m					A's,ap,drt=	6.03 cm^2				

Tabelas e Gráficos do Cálculo da Deformação pelo Método de Integração Numérica

Deformação elástica

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0
M [kNm]	-66.00	5.28	60.72	100.32	124.08	132.00	124.08	100.32	60.72	5.28	-66.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
E [KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_c [m^4]	0.01811	0.01811	0.01811	0.01811	0.01811	0.01811	0.01811	0.01811	0.01811	0.01811	0.01811
$1/EI_c$ [$x10^{-3}$]	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
$1/r_c$=M/EI_c [$x10^{-3}$]	-0.118	0.009	0.108	0.179	0.221	0.235	0.221	0.179	0.108	0.009	-0.118
f(i) = M *1/rc	0.000	0.003	0.065	0.161	0.265	0.353	0.265	0.161	0.065	0.003	0.000

M(x*)= 132.00 kNm

ac	
[m]	[mm]
0.00081	**0.81 [mm]**

Deformação Instantânea

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
A's (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
M [kNm]	-66.00	5.28	60.72	100.32	124.08	132.00	124.08	100.32	60.72	5.28	-66.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
ζ=1-β(M_{cr}/M)^2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.069	0.177	0.069	0.000	0.000	0.000	0.000
$E_{c,eff}$[KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_I [m^4]	0.01866	0.01893	0.01893	0.01893	0.01893	0.01893	0.01893	0.01893	0.01893	0.01893	0.01866
I_{II} [m^4]	0.00097	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00170	0.00097
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-0.114	0.009	0.103	0.171	0.211	0.225	0.211	0.171	0.103	0.009	-0.114
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-2.191	0.100	1.152	1.904	2.355	2.505	2.355	1.904	1.152	0.100	-2.191
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-0.114	0.009	0.103	0.171	0.358	0.628	0.358	0.171	0.103	0.009	-0.114
f(i) = M *1/r_m	0.000	0.003	0.062	0.154	0.430	0.943	0.430	0.154	0.062	0.003	0.000

$a_{I,0}$ =	**0.77 [mm]**
$a_{II,0}$ =	**8.61 [mm]**

a0	
[m]	[mm]
0.00140	**1.40 [mm]**

Deformação a Longo Prazo

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	10.05E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
A's (m^2)	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	04.02E-04	06.03E-04	06.03E-04	06.03E-04
M [kNm]	-66.00	5.28	60.72	100.32	124.08	132.00	124.08	100.32	60.72	5.28	-66.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
ζ=1-β(M_{cr}/M)^2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.534	0.588	0.534	0.000	0.000	0.000	0.000
$E_{c,eff}$[KPa]	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06
I_I [m^4]	0.02003	0.02094	0.02094	0.02094	0.02094	0.02094	0.02094	0.02094	0.02094	0.02094	0.02003
I_{II} [m^4]	0.00296	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00529	0.00296
$1/r_I$ [10^{-3}/m]	-0.372	0.028	0.327	0.541	0.669	0.712	0.669	0.541	0.327	0.028	-0.372
$1/r_{II}$ [10^{-3}/m]	-2.518	0.113	1.297	2.143	2.650	2.819	2.650	2.143	1.297	0.113	-2.518
$1/r_m$ [10^{-3}/m]	-0.372	0.028	0.327	0.541	1.728	1.952	1.728	0.541	0.327	0.028	-0.372
f(i) = M *1/r_m	0.000	0.009	0.196	0.487	2.073	2.928	2.073	0.487	0.196	0.009	0.000

$a_{I,\infty}$ =	**2.45 [mm]**
$a_{II,\infty}$ =	**9.69 [mm]**

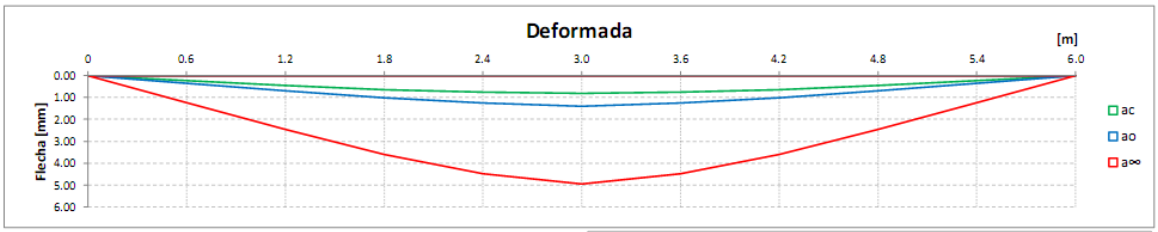
a∞	
[m]	[mm]
0.00495	**4.95 [mm]**

Método da Secção Determinante

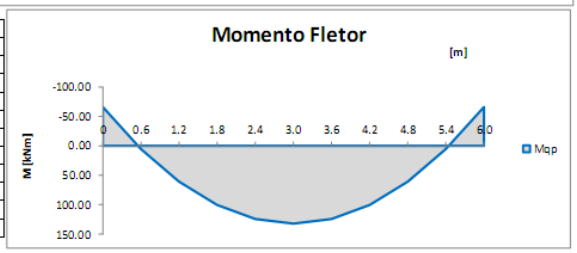
Im,0 =	0.00678 [m^4]
a0 SD =	**2.16 [mm]**
	ε= 54.5 %

Im∞ =	0.00763 [m^4]
a∞ SD =	**6.71 [mm]**
	ε= 35.5 %

<L/250?	OK



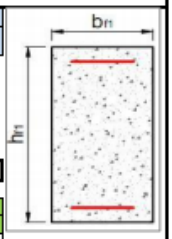
x* [m]	ac [mm]	a0 [mm]	a∞ [mm]	Mqp [kNm]
0	0.00	0.00	0.00	-66.00
0.6	0.23	0.35	1.24	5.28
1.2	0.45	0.69	2.46	60.72
1.8	0.64	1.01	3.60	100.32
2.4	0.75	1.25	4.48	124.08
3.0	0.81	1.40	4.95	132.00
3.6	0.75	1.25	4.48	124.08
4.2	0.64	1.01	3.60	100.32
4.8	0.45	0.69	2.46	60.72
5.4	0.23	0.35	1.24	5.28
6.0	0.00	0.00	0.00	-66.00



A 5 – Resultados do exemplo demonstrativo do capitulo 3.5

VIGA SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

				hf1 =	0.30 m		[cm^2]	Betão	C25/30	Aço	A500
pqp =	44.00 kN/m	L [m]=	6.00 m	bw=		As,ap,esq=	15.71 cm^2	Ecm =	31.0 GPa	Es =	200.0 GPa
φ=	2.5	L/250 [m]=	0.024	hf2=		A's,ap,esq=	3.39 cm^2	fctm =	2.6 MPa		
				hf1 =	0.60 m	As,vão=	15.71 cm^2	Mcr=	46.80 kNm		
$Mqp_{ap,esq}$ =	0.00 kNm			bw=		A's,vão=	3.39 cm^2	Δ L=	0.6 m		
$Mqp_{ap,dir}$ =	0.00 kNm			hf2=		As,ap,dir=	15.71 cm^2	Ic=	0.00540 m^4		
Secção de estudo (x*) =	3.00 m					A's,ap,dir=	3.39 cm^2				



Tabelas e Gráficos do Cálculo da Deformação pelo Método de Integração Numérica

Deformação elástica

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0
Mqp [kNm]	0.00	71.28	126.72	166.32	190.08	198.00	190.08	166.32	126.72	71.28	0.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
E [KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_c [m^4]	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540	0.00540
$1/EI_c$ [x10^-3]	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006
$1/r_c = M/EI_c$ [x10^-3]	0.000	0.426	0.757	0.994	1.135	1.183	1.135	0.994	0.757	0.426	0.000
f(i) = M *1/rc	0.000	0.128	0.454	0.894	1.363	1.774	1.363	0.894	0.454	0.128	0.000

Mqp(x*)	198.00 kNm
Med(x*)	471.06 kNm

ac	
[m]	[mm]
0.00451	4.51 [mm]

Deformação Instantânea

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04
A's (m^2)	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04
Mqp [kNm]	0.00	71.28	126.72	166.32	190.08	198.00	190.08	166.32	126.72	71.28	0.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
$\xi=1-\beta[M_{cr}/M]^2$	0.000	0.569	0.864	0.921	0.939	0.944	0.939	0.921	0.864	0.569	0.000
$E_{c,eff}$ [KPa]	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06	31.0E+06
I_I [m^4]	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615	0.00615
I_{II} [m^4]	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198	0.00198
$1/r_I$ [10^-3/m]	0.000	0.374	0.665	0.872	0.997	1.039	0.997	0.872	0.665	0.374	0.000
$1/r_{II}$ [10^-3/m]	0.000	1.163	2.067	2.713	3.101	3.230	3.101	2.713	2.067	1.163	0.000
$1/r_m$ [10^-3/m]	0.000	0.823	1.876	2.568	2.974	3.108	2.974	2.568	1.876	0.823	0.000
$f(i) = M *1/r_m$	0.000	0.247	1.126	2.311	3.568	4.662	3.568	2.311	1.126	0.247	0.000

aI,0 =	3.96 [mm]
aII,0 =	12.31 [mm]

a0	
[m]	[mm]
0.01158	11.58 [mm]

Deformação a Longo Prazo

secção i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x(m)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	6
As (m^2)	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04	15.71E-04
A's (m^2)	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04	03.39E-04
Mqp [kNm]	0.00	71.28	126.72	166.32	190.08	198.00	190.08	166.32	126.72	71.28	0.00
M	0.00	0.30	0.60	0.90	1.20	1.50	1.20	0.90	0.60	0.30	0.00
$\xi=1-\beta[M_{cr}/M]^2$	0.000	0.784	0.932	0.960	0.970	0.972	0.970	0.960	0.932	0.784	0.000
$E_{c,eff}$ [KPa]	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06	08.9E+06
I_I [m^4]	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788	0.00788
I_{II} [m^4]	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506	0.00506
$1/r_I$ [10^-3/m]	0.000	1.021	1.816	2.383	2.724	2.837	2.724	2.383	1.816	1.021	0.000
$1/r_{II}$ [10^-3/m]	0.000	1.590	2.827	3.711	4.241	4.417	4.241	3.711	2.827	1.590	0.000
$1/r_m$ [10^-3/m]	0.000	1.468	2.758	3.658	4.195	4.373	4.195	3.658	2.758	1.468	0.000
$f(i) = M *1/r_m$	0.000	0.440	1.655	3.292	5.034	6.560	5.034	3.292	1.655	0.440	0.000

aI,∞ =	10.81 [mm]
aII,∞ =	16.84 [mm]

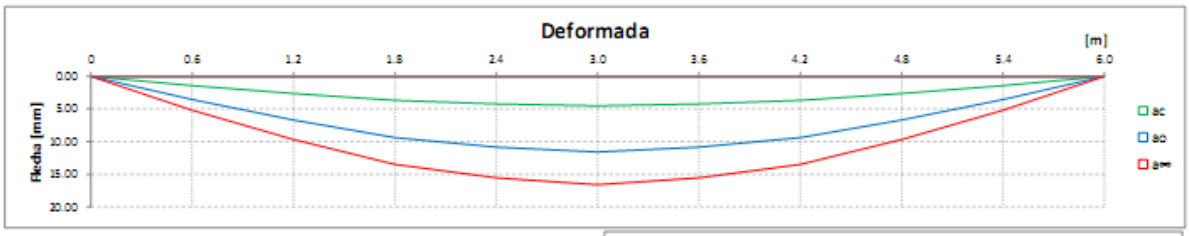
a∞	
[m]	[mm]
0.01657	16.57 [mm]

Método da Secção Determinante

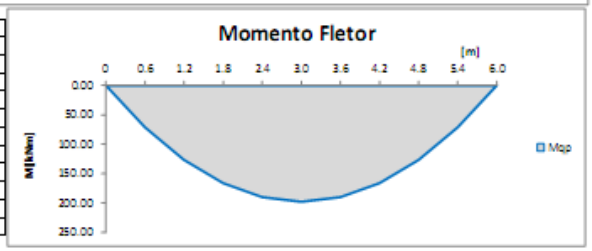
Im,0 =	0.00206 [m^4]
a0 SD =	11.84 [mm]
ε=	2.3 %

Im∞ =	0.00511 [m^4]
a∞ SD =	16.67 [mm]
ε=	0.6 %

<L/250?	OK

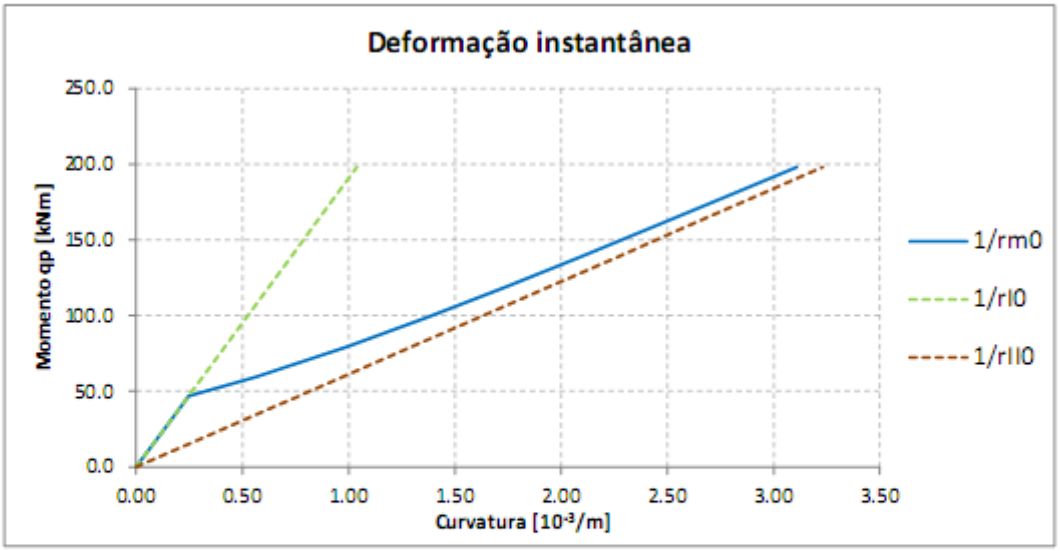


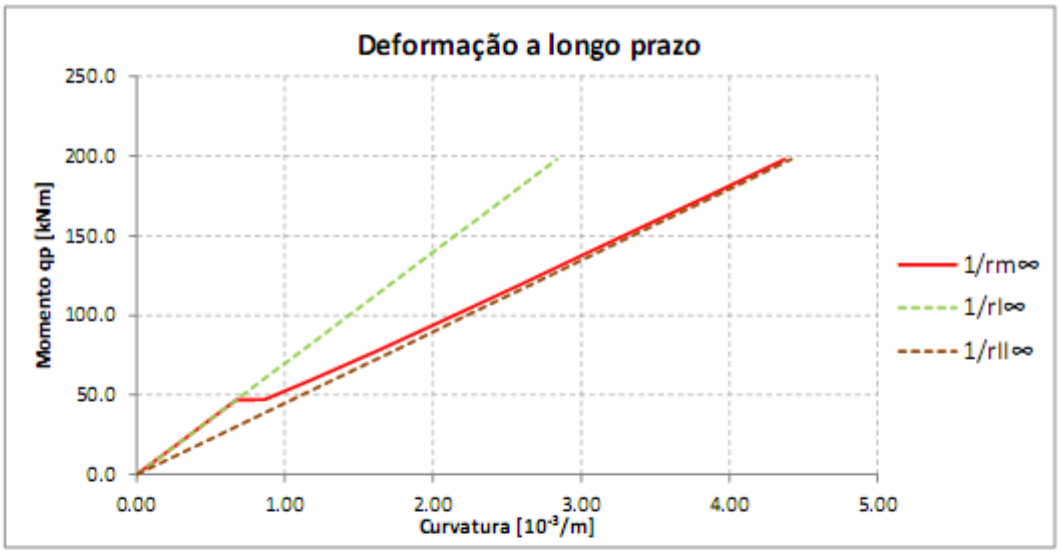
x* [m]	ac [mm]	a0 [mm]	a∞ [mm]	Mqp [kNm]
0	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	1.42	3.54	5.18	71.28
1.2	2.63	6.68	9.65	126.72
1.8	3.67	9.37	13.46	166.32
2.4	4.22	10.83	15.52	190.08
3.0	4.51	11.58	16.57	198.00
3.6	4.22	10.83	15.52	190.08
4.2	3.67	9.37	13.46	166.32
4.8	2.63	6.68	9.65	126.72
5.4	1.42	3.54	5.18	71.28
6.0	0.00	0.00	0.00	0.00



A 5 – Resultados do exemplo demonstrativo do capitulo 3.5 (continuação)

Gráficos Momento - Curvatura

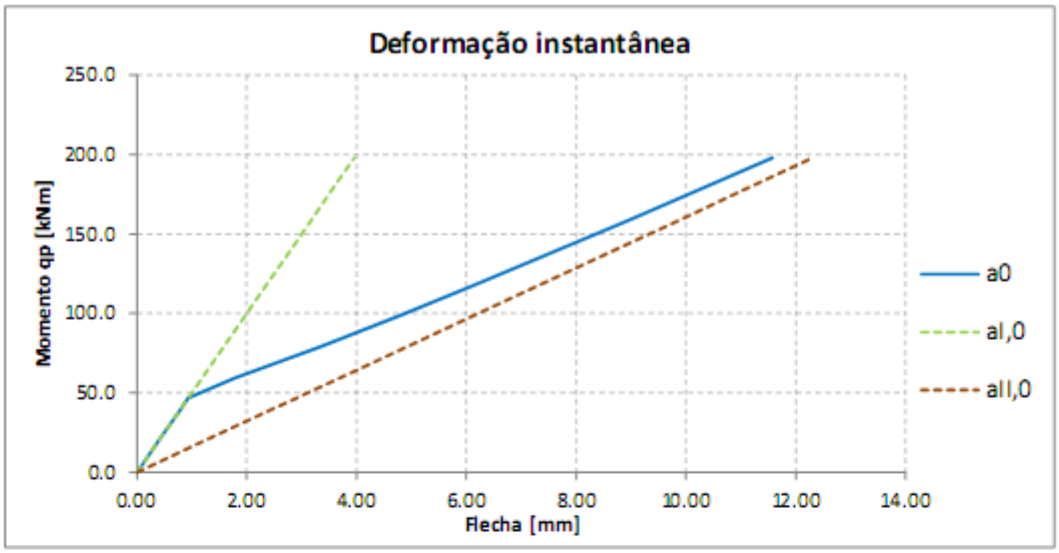


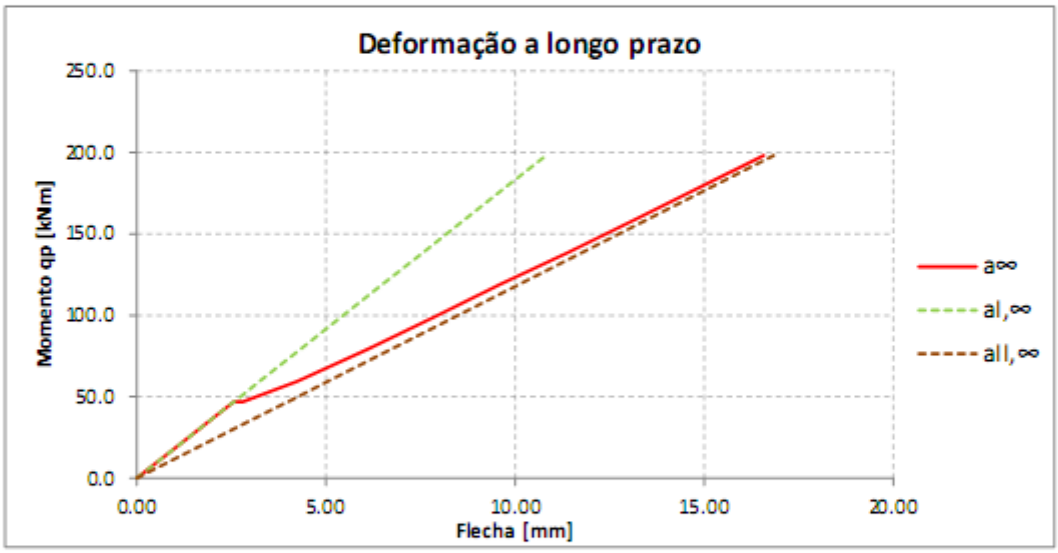


			[10^{-3}/m]					
pqp [kN/m]	**Mqp** [kNm]	**Mqp/Mcr**	$1/r_{I0}$	$1/r_{II0}$	$1/r_{m0}$	$1/r_{I\infty}$	$1/r_{II\infty}$	$1/r_{m\infty}$
0.0	0.0	0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.4	19.8	0.42	0.104	0.323	0.104	0.284	0.442	0.284
8.8	39.6	0.85	0.208	0.646	0.208	0.567	0.883	0.567
10.4	46.8	1.00	0.245	0.764	0.245	0.671	1.044	0.671
10.4	47.0	1.00	0.247	0.767	0.251	0.673	1.049	0.863
13.2	59.4	1.27	0.312	0.969	0.561	0.851	1.325	1.178
17.6	79.2	1.69	0.415	1.292	0.986	1.135	1.767	1.657
22.0	99.0	2.12	0.519	1.615	1.370	1.419	2.209	2.120
26.4	118.8	2.54	0.623	1.938	1.734	1.702	2.650	2.577
30.8	138.6	2.96	0.727	2.261	2.086	1.986	3.092	3.029
35.2	158.4	3.38	0.831	2.584	2.431	2.270	3.534	3.479
39.6	178.2	3.81	0.935	2.907	2.771	2.554	3.976	3.927
44.0	198.0	4.23	1.039	3.230	3.108	2.837	4.417	4.373

A 5 – Resultados do exemplo demonstrativo do capitulo 3.5 (continuação)

Gráficos Momento - Flecha





			[mm]					
pqp [kN/m]	Mqp [kNm]	Mqp/Mcr	aI,0	aII,0	a0	aI,∞	aII,∞	a∞
0.0	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.4	19.8	0.42	0.40	1.23	0.40	1.08	1.68	1.08
8.8	39.6	0.85	0.79	2.46	0.79	2.16	3.37	2.16
10.4	46.8	1.00	0.94	2.91	0.94	2.56	3.98	2.56
10.4	47.0	1.00	0.94	2.92	0.94	2.57	4.00	2.79
13.2	59.4	1.27	1.19	3.69	1.78	3.24	5.05	4.25
17.6	79.2	1.69	1.58	4.92	3.35	4.33	6.73	6.11
22.0	99.0	2.12	1.98	6.16	4.82	5.41	8.42	7.87
26.4	118.8	2.54	2.38	7.39	6.21	6.49	10.10	9.59
30.8	138.6	2.96	2.77	8.62	7.57	7.57	11.78	11.41
35.2	158.4	3.38	3.17	9.85	8.93	8.65	13.47	13.14
39.6	178.2	3.81	3.56	11.08	10.26	9.73	15.15	14.86
44.0	198.0	4.23	3.96	12.31	11.58	10.81	16.84	16.57